I −44

3相から成る複合材料の平均弾性の予測

東北大学工学部　○学生員　小倉　崇生
東北大学大学院工学研究科　正　員　岩熊　哲夫
東北大学大学院工学研究科　正　員　中沢　正利

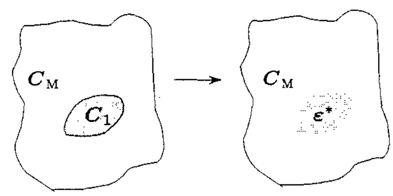
1.　まえがき

土木構造材料はほとんどが複合材料と考えて良く，その内部に空隙，亀裂，介在物等の微視構造を有している．これらの微視構造は材料の性質を決定する要因であり，微視的挙動はもちろんのこと，土木の分野で第一に必要とされる巨視的挙動にも大きな影響を与える．微視的な観点から，巨視的挙動の情報である巨視的平均弾性を予測する研究は古くから行われており，その多くが Eshelby の研究[1]に基礎を置く等価介在物法[2]を利用している．材料の巨視的平均弾性を求める際の重要な事は，母材と介在物および介在物同士の相互作用をどのようにして評価するかということである．この相互作用を近似する方法として，森・田中理論[3]が提案されている．本論文では，森・田中理論を用いて，3相から成る複合材料の平均弾性の予測を行う．

2.　解析方法

(1)　2相から成る複合材料の平均化手法

解析対象を，図–1左に示すような，介在物を含む不均一な材料とする．図中の $\boldsymbol{C}_{\rm M}$，$\boldsymbol{C}_{\rm I}$ はそれぞれ母材および介在物の応力テンソルである．等価介在物法による解析では，介在物の弾性定数を母材の弾性定数に置き換え，それと同時に，その内部に働く応力がもとの問題と等しくなるように eigen ひずみと呼ばれる量を ε_* を分布させる (図–1右)．すると，介在物内の挙動は平均的に次のように表せる．



図–1　等価介在物法のイメージ

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\rm I} = \boldsymbol{C}_{\rm I}\{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\rm D} + \boldsymbol{\gamma}\} = \boldsymbol{C}_{\rm M}\{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\rm D} + \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\varepsilon}^*\} \quad \cdots\cdots (1)$$

ここに $\langle\rangle$ はその材料中の体積平均，$\boldsymbol{\gamma}$ は介在物の存在による乱れ成分である．また $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\rm D}$ は介在物を多数存在する効果を含んだ材料全体の平均ひずみを表している．上式は介在物内部の平均ひずみを，母材の平均ひずみ成分，母材と介在物および介在物同士の相互作用のために発生する乱れ成分の平均とに分解したことを示している．この乱れ成分は，境界の影響と介在物同士の相互作用が無視できる場合に Eshelby のテンソル $\boldsymbol{S}$ を用いて次のように表せる事が知られている．

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\varepsilon}^* \quad \cdots\cdots (2)$$

さらに各相の平均関係から，ひずみと応力の全体平均 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}$ を次のように定義できる．

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} \equiv f\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\rm I} + (1-f)\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\rm M},\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv f\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\rm I} + (1-f)\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\rm D} \quad \cdots\cdots (3)$$

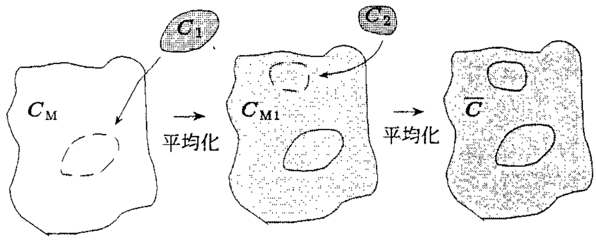
ここで，f は介在物の体積率である．式 (1), (2), (3) より，応力とひずみの全体関係が $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \overline{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ で求められ，$\overline{\boldsymbol{C}}$ が巨視的平均弾性となる．介在物が球状楕円体である場合，体積弾性率とせん断弾性係数は次のように表せる．

$$\frac{\bar{\kappa}}{\kappa_{\rm M}} = 1 - \frac{f(1-\frac{\kappa_{\rm I}}{\kappa_{\rm M}})}{1-(1-f)(1-\frac{\kappa_{\rm I}}{\kappa_{\rm M}})\alpha},\quad \frac{\bar{\mu}}{\mu_{\rm M}} = 1 - \frac{f(1-\frac{\mu_{\rm I}}{\mu_{\rm M}})}{1-(1-f)(1-\frac{\mu_{\rm I}}{\mu_{\rm M}})\beta} \quad \cdots\cdots (4)$$

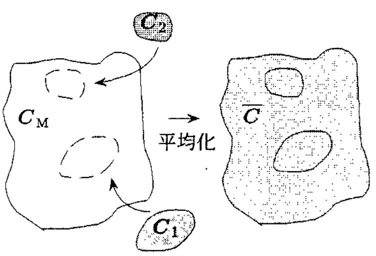
ここで α, β は $\boldsymbol{S}$ 中の定数で，母材のポアソン比によって決定される．

(2)　3相から成る複合材料の平均化手法

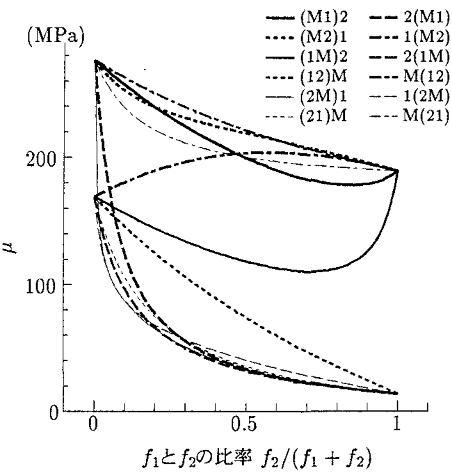
前節で得られた結果を3相から成る複合材料に応用する方法は2つある．1つは図–2のように，3種類の材料のうちの2相に注目して平均化を行い，新たにできた相と残りの相の2相で再度平均化する方法である．介在物1, 介在物2の体積率をそれぞれ f_1, f_2 で表すと，3相を2相の平均化の繰り返しによって求めた平均弾性は次のようになる．



図–2 介在物を別々に介在させたとき



図–3 介在物を同時に介在させたとき



図–4 介在物を別々に介在させたとき平均弾性

$$\frac{\kappa_{(\mathrm{M1})2}}{\kappa_{\mathrm{M}}}=\left\{1-\frac{\frac{f_1}{1-f_2}(1-\frac{\kappa_1}{\kappa_{\mathrm{M}}})}{1-(1-\frac{f_1}{1-f_2})(1-\frac{\kappa_1}{\kappa_{\mathrm{M}}})\alpha_1}\right\}\left\{1-\frac{f_2(1-\frac{\kappa_2}{\kappa_{\mathrm{M1}}})}{1-(1-f_2)(1-\frac{\kappa_2}{\kappa_{\mathrm{M1}}})\alpha_{\mathrm{M1}}}\right\} \cdots\cdots (5)$$

ここで添字の (M1)2 は，母材 M に介在物 1 を加えて平均化し，それに介在物 2 を加えて平均化された複合材料の平均弾性である．また，もう 1 つの方法を図–3 に示す．式 (3) を前節の 2 相の定式化と同じ手順で次のように置き換えれば 3 相に拡張することができる．

$$\bar{\sigma}\equiv f_1\langle\sigma\rangle_1+f_2\langle\sigma\rangle_2+(1-f_1-f_2)\langle\sigma\rangle_{\mathrm{M}},\ \bar{\varepsilon}\equiv f_1\langle\varepsilon\rangle_1+f_2\langle\varepsilon\rangle_2+(1-f_1-f_2)\langle\varepsilon\rangle_{\mathrm{D}} \cdots\cdots (6)$$

よって，3 相を同時に平均化したときの平均弾性は次のように求めることができる．

$$\frac{\bar{\kappa}}{\kappa_{\mathrm{M}}}=\left\{1+\sum_{i=1}^{2}\frac{f_i(\alpha_i-1)(\kappa_{\mathrm{M}}-\kappa_i)}{\kappa_{\mathrm{M}}-(\kappa_{\mathrm{M}}-\kappa_i)\alpha_i}\right\}\Bigg/\left\{1+\sum_{i=1}^{2}\frac{f_i\alpha_i(\kappa_{\mathrm{M}}-\kappa_i)}{\kappa_{\mathrm{M}}-(\kappa_{\mathrm{M}}-\kappa_i)\alpha_i}\right\} \cdots\cdots (7)$$

3. 数値例

森・田中理論を用いると，母材に介在物を加えていった場合は平均弾性が上界を示し，介在物に母材を加えていった場合は下界を示す事が知られている．図–4 は式 (5) を用いて 3 相の平均弾性を求めた結果である．ここに各材料の弾性定数は，κ_{M}=1000(MPa), μ_{M}=2000(MPa), κ_1=300(MPa), μ_1=100(MPa), κ_2=35(MPa), μ_2=7(MPa), 介在物の体積率 f_1+f_2 は 0.7 とした．母材に 2 種類の介在物を別々に介在させる方法を用いると，材料を加える順序を変えることによって 12 通りの平均弾性を求めることができる．f_2=0 の場合は母材 M と介在物 1 の 2 相，f_1=0 の場合は母材 M と介在物 2 の 2 相から成る複合材料と見なすことができ，それぞれの場合に上界と下界の 2 つの平均弾性を与えるので，3 相の平均弾性は f_1=0, f_2=0 でのそれらの点を端点として持つ曲線を描く．特にこの曲線群の中の上界と下界に注目すると，上界と下界は 1 本の曲線ではなく，複数の曲線からなっていることが分かる．これは介在物それぞれの体積率によって，平均化したい 2 相の平均弾性の大小が変化するからである．また介在物を別々に加える方法は，同時に加える場合よりもわずかながら精度の良い上界と下界を与えることも分かった．

参考文献

1) Eshelby, J. D. : The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, *Proc. Roy. Soc. London*, Vol.A241, pp.376–396, 1957.
2) Mura, T. : *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ, 1982.
3) Mori, T. and Tanaka, K. : Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Act Metalurgical*, Vol.21, pp.571–574, 1973.