

対称性の喪失による均質材料の非均質化と巨視的挙動

東北大学工学部 学生員 ○山川 優樹
 (日本学術振興会特別研究員)
 東北大学工学部 正会員 池田 清宏
 東北大学工学部 正会員 寺田 賢二郎

1. はじめに

本研究では、周期境界を有する弾塑性材の長方形領域が平面ひずみ状態で変形する場合の、面内変形解析を行った。初期状態が均質な材料の変形解析に於いて、変形場を、均一変形場と周期的変形場とに分けて考え、後者について解くべき境界値問題を設定した。このとき、基本経路上の一樣変形からは、分岐をきっかけとして周期的な不均一変形が発生するが、周期境界条件を導入することで、群論的分岐理論¹⁾により得られている結論との整合性を持たせることができる。

弾塑性材の変形挙動には、微細な亀裂やせん断帯、すべりの発生といった変形の局所化が介在していることが広く知られているが、これはある変形形態が不安定化することによって別の変形形態へと遷移する現象、すなわち分岐現象と捉えることができる。弾塑性材の分岐モードとその発生条件に関する先駆的研究として、例えば Hill and Hutchinson²⁾は、解の唯一性を検討することによりせん断帯・拡散モード発生条件を理論的に記述している。その後、数値解析手法の発達により、より実現象に近い条件下での力学挙動のシミュレーションが広く行われるようになり、例えば Asaoka and Noda³⁾は要素試験の水/土骨格連成系の分岐現象に関して実験・数値解析を行っている。

本研究は、均一変形場からの分岐の発生とそのモード、および分岐により生じる不均一変形について、周期境界条件の導入により解析・考察する点が特色である。

2. 解析方法

周期境界を有する領域において、時刻 t の現配置における速度形境界値問題を考える。このとき、平衡方程式と境界条件はそれぞれ、

$$\nabla_y \cdot {}_t\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{0}, \dots\dots\dots (1)$$

$${}_t\dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{n} \text{ is antiperiodic}; \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{y} + \dot{\mathbf{u}}^*, \quad \dot{\mathbf{u}}^* \text{ is periodic} \dots\dots\dots (2)$$

と与えられる⁴⁾。ここで、 ${}_t\dot{\mathbf{H}}$ は時刻 t の配置を基準とする相対公称応力速度、 $\mathbf{E}^0$ は領域内で一定な速度勾配である。式(2)の第1, 第2式はそれぞれ力学的、幾何学的境界条件である。このとき変形速度 $\mathbf{D}$ は、

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^0 + \mathbf{D}^*, \quad \mathbf{D}^0 = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^0 + \mathbf{L}^{0T}), \quad \mathbf{D}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^* + \mathbf{L}^{*T}), \quad \mathbf{L}^0 = \mathbf{E}^0, \quad \mathbf{L}^* = \nabla_y \otimes \dot{\mathbf{u}}^* \dots\dots (3)$$

と書くことができる。また、弾塑性材の構成則は有限変形を考慮した拡張 Prandtl-Reuss 式を用いる。相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度と変形速度とが、4 階のテンソル ${}_t\mathbf{C}^{\text{ep}}$ を介して線形に関係付けられるものとすると、Truesdell 応力速度 ${}_t\dot{\mathbf{S}}$ と変形速度は、

$${}_t\dot{\mathbf{S}} = {}_t\mathbf{C}^{\text{ep}} : \mathbf{D} - \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} = {}_t\bar{\mathbf{C}}^{\text{ep}} : \mathbf{D} \dots\dots\dots (4)$$

と関係付けられる。ここで、左下付き添字 t は参照時刻を意味し、また $\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy 応力である。以上より、Updated Lagrange 法を念頭に置いた、式(1), (2)と同等な仮想仕事式は、

$$\int_V {}_t\bar{\mathbf{C}}^{\text{ep}} : (\mathbf{D}^0 + \mathbf{D}^*) : \delta \mathbf{D}^* dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \{(\mathbf{L}^0 + \mathbf{L}^*)^T \cdot \delta \mathbf{L}^*\} dV = 0 \dots\dots\dots (5)$$

と表される⁵⁾。一般的な境界値問題と異なり、周期境界条件の下で式(5)を解く際には、均一変形 $\mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{y}$ を見掛けの「外力」として与え、それに対する周期的な速度場 $\dot{\mathbf{u}}^*$ について解くことになる。

3. 数値解析例

本研究では、平面ひずみ状態を仮定した長方形領域 $L_1 \times L_2$ の2次元解析を行った。領域のサイズ $L_1 \times L_2$ は均一変形により変化するが、長方形領域の上下端、左右端はそれぞれ周期的な境界により滑らかにつながっているものとする。基底関数として2重 Fourier 級数項を用いて、

$$\dot{\mathbf{u}}^*(\mathbf{y}) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \alpha \phi^*(\mathbf{y}) \boldsymbol{\alpha} c, \quad \alpha \phi^*(\mathbf{y}) = \sin \frac{2\pi m_{\alpha} y_1}{L_1} \sin \frac{2\pi n_{\alpha} y_2}{L_2} \text{ etc.} \dots\dots\dots (6)$$

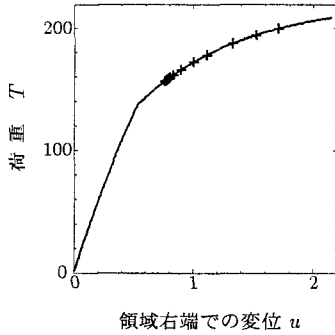


図-1 基本経路上の分岐点の分布

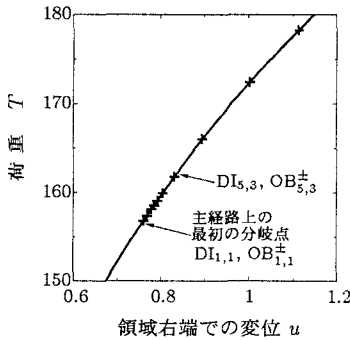
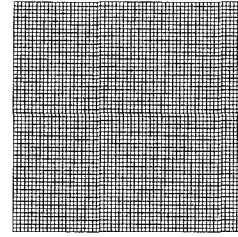
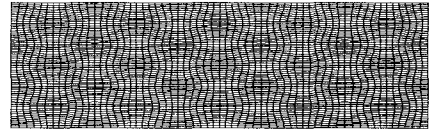


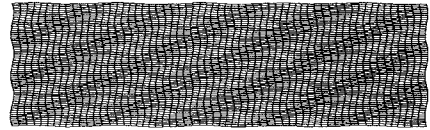
図-2 「分岐モードの集積」付近の拡大図



初期状態



$DI_{5,3}$ 発生時の伸びとモード



$OB_{5,3}$ 発生時の伸びとモード

図-3 分岐点における伸びと予測される分岐モード

のように周期的な速度場をと離散的に表現した。ここでは、 x_1 方向に一樣な引張り力をうける場合を考え、与えられた均一速度場 $E^0 \cdot y$ のもとで、式(5)を周期的な速度場 $\dot{u}^*$ について解く。

数値解析例として、式(6)の2重 Fourier 級数項のうち、 $m, n = 1, \dots, 6$ 波の項を用いたケースについて紹介する。求めた基本経路のつり合い経路と、基本経路上の分岐点の分布を、図-1 に示す。図中の (+) が分岐点の位置を表す。変位 u は領域右端の変位、荷重 T は領域左右端の単位長さに働く引張り力である。

基本経路上の第1分岐点が発生した直後に、多数の分岐点が密に表れているが、これは Hill and Hutchinson²⁾ が指摘している、分岐のある閾値直後の「分岐モードの集積」が数値事例として表れたものと考えられる。この付近を拡大したものを図-2 に示す。また、確認された分岐モードのうち、例として図-2 中に示した分岐点での伸び状態と固有モードから予測されるモード $DI_{5,3}$ 、 $OB_{5,3}^-$ を図-3 に示す。これらのモードの対称性を表す表記法の詳細については文献¹⁾を参照されたい。

4. 結果・考察

本研究では、周期境界条件の下での境界値問題を設定し、面内変形解析において、一樣変形場から、分岐をきっかけとして発生する不均一モードを調べた。ここに示した例では、2重 Fourier 級数による速度場の離散化を行い、基本経路上の分岐から予測されるモードを示した。しかし、局所化を含む有限ひずみ問題では、変形履歴を更新していく updated Lagrange 法に基づく有限要素法などにより幾何学的非線形性を考慮する方法が必要と考えられ、これについては現在のところ進行中である。

参考文献

- 1) Ikeda, K. and Murota, K.: Recursive bifurcation as sources of complexity in soil shearing behavior, *Soils and Foundations*, Vol. 37, No. 3, pp. 17-29, 1997.
- 2) Hill, R. and Hutchinson, J. W.: Bifurcation phenomena in the plane tension test, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 23, pp. 239-264, 1975.
- 3) Asaoka, A. and Noda, T.: Imperfection-sensitive bifurcation of Cam-clay under plane strain compression with undrained boundaries, *Soils and Foundations*, Vol. 35, pp. 83-100, 1995.
- 4) Gerard A. Maugin: The Thermomechanics of Plasticity and Fracture, Cambridge texts in applied mathematics, Cambridge, 1992.
- 5) 久田 俊明, 野口 裕久: 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, 1995.