I －42

内部に亀裂を含む材料のマルチスケール解法

○東北大学工学部　学生員　真野 篤志
東北大学工学部　正会員　寺田 賢二郎
東北大学工学部　正会員　池田 清宏

1. はじめに

解析の対象となる構造体内に無数の亀裂が存在し，その亀裂面が接触面となるような問題において，亀裂が全体構造に対して非常に小さな場合には，微視領域に存在するそれらの亀裂1つ1つを直接モデル化し，全体構造物の挙動を解析することは，現在の計算機性能を以てしても多大な計算時間を要し，合理的方法とは言えない．このような問題に対し均質化法は，ミクロスケールとマクロスケールという2つの異なるスケールを導入することにより，それぞれのスケールにおける境界値問題が導出され，ミクロ構造に依存したマクロ構造体の解析を行うことが可能である．また，供試体寸法を無限大にしたときの極限値を与えることから，寸法に左右されることがなく，構造物全体の正しい物性評価の強力な手段となりうる．

本研究では内部に周期的に分布する無数の微小亀裂を含む構造体に対する均質化法の定式化を示し，その数値解析例によってマルチスケール解析法の適用性を考察するとともに，構造系全体からみた物性評価に対する簡単な例として，ミクロ領域において亀裂が発生するケースと亀裂がある幅を有するケースについて，マクロ構造体の力学挙動をシミュレートするようなプログラムを開発した．

2. 局所接触問題への均質化法

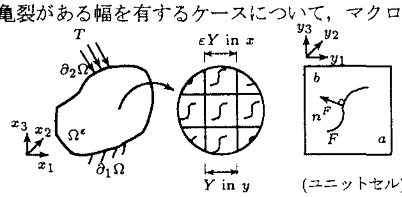

図.1　マクロ構造とミクロ構造

図.1 に示すような周期的に分布する無数の微小亀裂を含む線形弾性体を考える．この亀裂を含む構造全体の3次元領域 $\Omega^\varepsilon \subset R^3$ は，代表長さ ε を有する基本周期構造領域（ユニットセル） εY を繰り返し配置することによって覆うことができるものとする．

均質化理論では，場の変数を $\boldsymbol{x} \in \Omega$（マクロスケール）と $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}/\varepsilon \in Y_F$（ミクロスケール）という，パラメータ ε を介した2つの異なるスケールを導入し，領域 Ω_F^ε における変位 $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ の漸近展開形の解を仮定する．結果として，これらのスケールそれぞれに対する境界値問題が導出される．巨視スケールの方程式は，

$$\boldsymbol{u}^0 \in U_F : \int_\Omega a_{ijkl} \frac{\partial w_i^0}{\partial x_j} \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} dx = -\int_\Omega a_{ijkl} \overline{\left(\frac{\partial u_k^1}{\partial y_h}\right)} \frac{\partial w_i^0}{\partial x_j} dx + \int_\Omega f_i w_i^0 dx + \int_{\partial_2\Omega} T_i w_i^0 ds \qquad \forall \boldsymbol{w}^0 \in V \cdots\cdots (1)$$

と表され， a_{ijkl}， f_i， T_i はそれぞれ弾性テンソル，物体力，表面力ベクトルを表している．ここで，$\bar{\ }$ は体積平均を与える演算子とし， $\tilde{F} = \overline{(F)} = \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_Y F(\boldsymbol{y}) dy$ である．式 (1) の右辺第1項が，微視スケールの接触状態を反映したマクロ変形に対する寄与分である．このマクロ問題の許容関数の空間は，

$$\boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{v}^0 \in V = \left\{ \boldsymbol{v} \,\middle|\, v_i \in H^1(\Omega)\,;\, v_i\big|_{\partial_1\Omega} = 0 \right\} \cdots\cdots (2)$$

なる線形空間となり，拘束条件は斉次の変位境界条件のみとなる．

一方，亀裂を有する弾性体の局所的な力学応答を得ることは，次の変分不等式を周期変形場 $\boldsymbol{u}^1$ について解くことに帰着する．

$$\boldsymbol{u}^1 \in \tilde{K}_{F_Y} : \int_{Y_F} a_{ijkl} \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \frac{\partial (w_i - v_i)}{\partial y_j} dy = -\int_{Y_F} a_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \frac{\partial (w_i - v_i)}{\partial y_j} dy \quad \forall \boldsymbol{w} \in \tilde{K}_{F_Y} \cdots\cdots (3)$$

周期変形場の線形空間は， $\tilde{V}_{Y_F} = \left\{ \boldsymbol{v} \,\middle|\, \boldsymbol{v} \in V_{F_Y}\,;\, \tilde{\boldsymbol{v}} = 0 \right\}$ で与えられ，この部分集合

$$\tilde{K}_{Y_F} = \left\{ \boldsymbol{v} \,\middle|\, \boldsymbol{v} \in V_{F_Y}\,;\, [n_i^F v_i]\big|_F \leq 0 \text{ a.e. on } F\,;\, \tilde{\boldsymbol{v}} = 0 \right\} \cdots\cdots (4)$$

が式 (3) における解の許容集合である．ここで， $\tilde{\boldsymbol{v}} = 0$ は $\boldsymbol{v}$ の領域 Y での体積平均がゼロとなることを表している．

また， $[\phi]$ は変数 ϕ の不連続量を表す記号であり，法線ベクトル $\boldsymbol{n}^F$ を有する亀裂面をはさんで与えられる値 ϕ_a ， ϕ_b の差 $\phi_a - \phi_b$ である．すなわち式 (4) における $[n_i^F v_i]\big|_F \leq 0$ は，ミクロ領域における亀裂面 F に沿った運動に対する制約条件を表し，等号が成立するとき接触，不等号のときは開口を表す．さらに，亀裂が開閉もずれも生じないような場合の制約条件は，同様の記号を用いて， $[\boldsymbol{v}]\big|_F = 0$ と表され，亀裂面が重なりうる場合は制約条件を考慮する必要はない．

3. 数値解析例

(1) マルチスケール構造解析例

均質化法の定式化より導出された微視及び巨視スケールの境界値問題 (1)，(3) を同時に解くことによって得られるマクロ構造体の変形挙動を実際に亀裂を配置したモデル（実モデル）のそれとを比較するため，図.2 に示すような荷重・支持条件を持つ全体構造モデルを考える．亀裂は x_2 軸に平行なものを用い，実モデルには 10×10 個の亀裂を配置した．また，

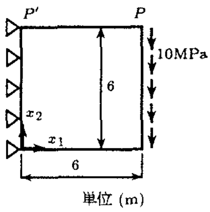

図.2 解析モデル

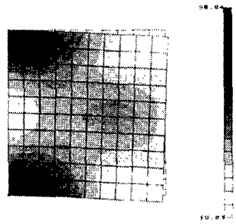

図.3 均質化法を用いた場合の変形応力図 (MPa)

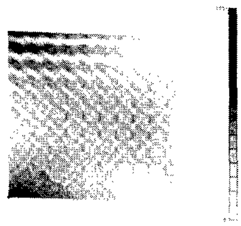

図.4 実際に亀裂を配したモデルの変形応力図 (MPa)

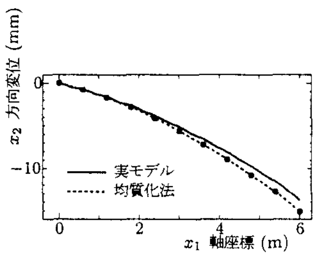

図.5 均質化法と実モデルの変形の比較

微視スケールの解析において外荷重となる巨視ひずみは，マクロ構造の各要素のガウス積分点において評価し，亀裂の制約条件は penalty 法によって処理した.

均質化法と実モデルを用いた場合の解析結果をそれぞれ図.3，図.4 に，図.2 における辺 $P-P'$ 上の x_2 方向変位を比較したものを 図.5に示す．均質化法理論はユニットセルが構造体内部に無限に存在することを仮定としているが，この解析例からは実モデルの挙動をよく近似しているといえる.

(2) マクロ構造体の非線形挙動

内部に亀裂を含む材料の特性，及びその材料を用いたマクロ構造体の力学挙動を均質化法によりシミュレートする．マクロ構造は 図.2 と同様の荷重・支持条件とし，ユニットセルはコンクリート材料に代表される，内部に骨材を含み，その境界が亀裂面となるようなモデルを用いる．有限要素解析において骨材の境界面にはすべて同一節点値を持つ２重節点が存在し，材料定数は材料基質部が Young 率 $E_1 = 250$(GPa)，Poisson 比 $\nu_1 = 0.3$，骨材部分が Young 率 $E_2 = 700$(GPa)，Poisson 比 $\nu_2 = 0.3$ と設定した.

その解析結果として，荷重変位関係を 図.6 に示す．ここで，case1 は亀裂がある幅を有している場合，case2 は亀裂が徐々に生成される場合の解析である.

case1 は，亀裂面における制約がない条件のもとで解析をはじめ，２重節点間の距離を計り，接触の判定がなされたら，$[n_i^F v_i]\big|_F \leq 0$ の制約を順次加えていく方法をとった．また case2 は，亀裂面において $[v]\big|_F = 0$ の制約条件を与え，２重節点での節点力ベクトルの大きさがある値を超えたとき，制約を順次除いていく方法によるものである．その際，この節点力ベクトルをミクロ解析の荷重ベクトルに加えることにより，応力を再分配する．case1，case2 の解析での P' 点付近でのユニットセルの変形応力図をそれぞれ 図.7，図.8に示す．両者を比較すると，制約条件の差は明らかであり，それがマクロ挙動に及ぼす影響は 図.6によく現れている.

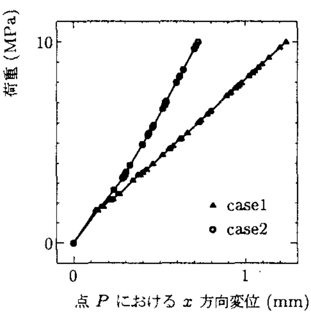

図.6 マクロ構造体における荷重変位関係

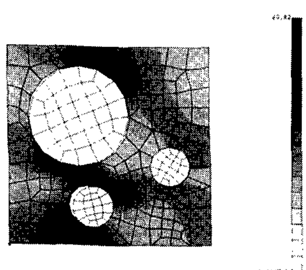

図.7 case1 での変形応力図 (MPa)

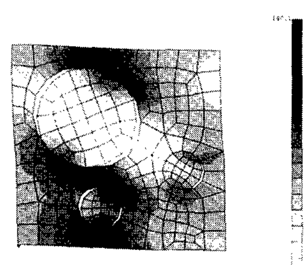

図.8 case2 での変形応力図 (MPa)

4. まとめ

本研究では，均質化理論を用いることにより，ミクロ構造に依存したマクロ構造の力学挙動を簡単な数値解析例を通して観察することができた．また，微視構造の解析における亀裂の発生や開閉により，マクロ的に非線形な挙動を再現することができた．ただし，亀裂面における摩擦や亀裂端部での応力集中の影響など，微視領域での力学挙動のメカニズムは複雑であり未知な部分も多く，現実の材料を用いる際には実験的なデータを補うなど考慮が必要である.

参考文献

1) 寺田賢二郎，京谷孝史：無数の亀裂を有する物体のマルチスケール解析法，土木学会論文集，投稿中.
2) Sanchez-Palencia， E.:*Non-homogeneous Media and Vibration Theory*， Lecture Notes in Physics 127， Spre 8 nger-Verlag， Berlin， 1980.