

局所的に分布したクラックによる散乱パワー特性

○ 東北大学 学生員 須藤 貴史
東北大学 正員 岸 典之
東北大学 正員 北原 道弘

1. はじめに

欠陥が分布して存在する場合、欠陥群に入射された波動エネルギーは各欠陥によって散乱され、散乱減衰を生じる¹⁾。散乱減衰、散乱パワー、散乱体の分布形態は密接に関係しているため、散乱パワーの周波数特性を前もって調べておけば、散乱減衰計測により、散乱体の分布形態を推定できる可能性がある。

本論文では複数クラックによる多重散乱問題を境界積分方程式により定式化し、これをボルン級数的に解析することにより、散乱パワーの総量を散乱体の幾何学的断面積に換算表現した散乱断面積の周波数特性について調べた。

2. 多重散乱問題の定式化

図-1 に示す2個のクラックによる多重散乱問題を考える。クラックの個数が増えても、解析法の要点は同じである。図中の u^{IN} 、 u^{SC} は入射波及び散乱波による変位場で、全変位場 u は u^{IN} と u^{SC} の和として定義される。ここで散乱波 u_i^{SC} は、クラック開口変位 Δu_j と基本解 Ξ_{ijk} により次の様に積分表現できる。

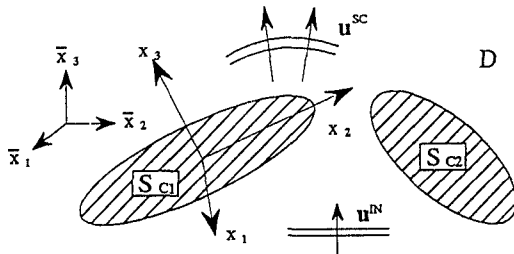


図-1 無限体 D 内のクラック SC_1 と SC_2

$$u_i^{SC}(x) = \int_{SC_1+SC_2} \Xi_{ijk}(x, y) n_k(y) \Delta u_j(y) dS_y, \quad x \in D \quad (1)$$

上式で応力に関する微分を行えば、散乱場による応力の積分表現を得る。ここで直接クラック面への境界極限をとると、超特異積分となり数値解析が困難になる。そこでテイラー展開により特異項を分離して正則化した後、クラック面上で全応力が0なる境界条件を適用する。この式を二次の形状関数を利用して離散化し、クラック面上の局所座標から全体座標に変換して次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{u}_1 \\ \Delta \bar{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

上付のバーは全体座標系での値を示す。 $\bar{f}_1$ 、 $\bar{f}_2$ はクラック SC_1 、 SC_2 上の入射波応力、 $\bar{K}_{11}$ 、 $\bar{K}_{21}$ は SC_1 上の積分項、 $\bar{K}_{12}$ 、 $\bar{K}_{22}$ は SC_2 上の積分項、 $\Delta \bar{u}_1$ 、 $\Delta \bar{u}_2$ は SC_1 、 SC_2 上の開口変位である。

3. ボルン級数の導入

式(2)の行列を対角項成分 A と非対角項成分 B に分離して次のように書く。以下上付のバーは省略する。

$$(A - B) \Delta u = f \quad (3)$$

ここで、 A 、 B 、 Δu 、 f は次のようになる。

$$A = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K^{-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -K_{12} \\ -K_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta u = \{\Delta u_1, \Delta u_2\}^T, \quad f = \{f_1, f_2\}^T \quad (4)$$

式(3)は次のように書き換えることができる。

$$(I - A^{-1}B) \Delta u = A^{-1}f \quad (5)$$

ここで $\|A^{-1}B\| = \|C\| < 1$ が成り立てば、式(5)より解 Δu は次のように表せる。

$$\Delta u = (I - C)^{-1} A^{-1}f = \sum_{k=0}^{\infty} C^k A^{-1}f \quad (6)$$

これが解 Δu のボルン級数表現である。ここでこの級数の第1項を Δu の第0次近似として Δu_0 とおくと、上式より第 n 次近似は次のようになる。

$$\Delta u_n = \Delta u_0 + C \Delta u_{n-1} = \sum_{k=0}^n C^k \Delta u_0 \quad (7)$$

また、ボルン級数の収束パラメータ E^n を次のように定義する。

$$E^n = \frac{\|C^n \Delta u_0\|}{\|\Delta u_n\|} \quad (8)$$

E^n は第 n 次ボルン級数近似での第 n 番目の項の寄与率を表している。この E^n を級数の収束判定に用いる。

4. 散乱断面積

散乱断面積 $P(\omega)$ は、散乱波の時間平均パワー $\langle P^{SC} \rangle$ と入射波の時間平均インテンシティ $\langle I^{IN} \rangle$ の比として次のように定義される²⁾。

$$P(\omega) = \frac{\langle P^{SC} \rangle}{\langle I^{IN} \rangle} = \frac{\int_A n_i \langle \sigma_{ij}^{SC} \dot{u}_j^{SC} \rangle dA}{\langle \sigma_{3j}^{IN} \dot{u}_j^{IN} \rangle} \quad (9)$$

上記散乱断面積の計算には、散乱パワーの放射特性を表す散乱微分断面積 $dP/d\Omega$ ($d\Omega$ は立体角) を次のように先に計算しておくことと都合がよい。

$$\frac{dP}{d\Omega} = |A_L|^2 + \frac{k_L}{k_T} (|A_T|^2 + |A_H|^2) \quad (10)$$

ここで、 A_L は縦波の散乱振幅、 A_T と A_H は横波の散乱振幅であり、式(1)の遠方表現から計算できる。散乱断面積 $P(\omega)$ は単位球面上で微分断面積を積分すれば求まる。

$$P(\omega) = \iint \frac{dP}{d\Omega} \sin \theta d\theta d\phi \quad (11)$$

5. 解析結果

以下、3つのクラックモデルについて解析を行った。ある平面上に、直径 $2a$ の円形クラックを (1) 1個配置したモデル、(2) 間隔を $a/2$ とり 4個正方形に配置したモデル、(3) 間隔を $a/2$ とり 9個格子状に配置したモデル (図-2) である。これらに縦波入射波をクラック面に垂直な方向から図-2のように入射した。また、母材のポアソン比は 0.25 である。散乱断面積と縦波波数の関係を図-3に示す。ここで、グラフ上の数値はクラックの半径 a で無次元化してある。

図-3 を見るとどの場合においても散乱断面積はほぼ同じ傾向を示し、クラック一個当たりの散乱断面積はほぼ一致している。しかし、縦波成分と横波成分で比較すると、散乱断面積がピークとなる $ak_L = 1.2$ 付近では、クラックの個数が増えるにつれて縦波成分が増加し、横波成分は減少していることがわかる。このことからクラック間の水平方向の相互干渉の影響は、系全体としての散乱パワーの総量にはあまり影響しないが、散乱パワーの分担形態には大きく影響していると言える。

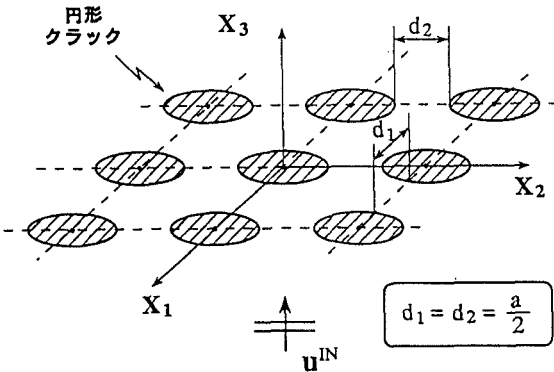


図-2 クラック配置の一例 (クラック 9 個)

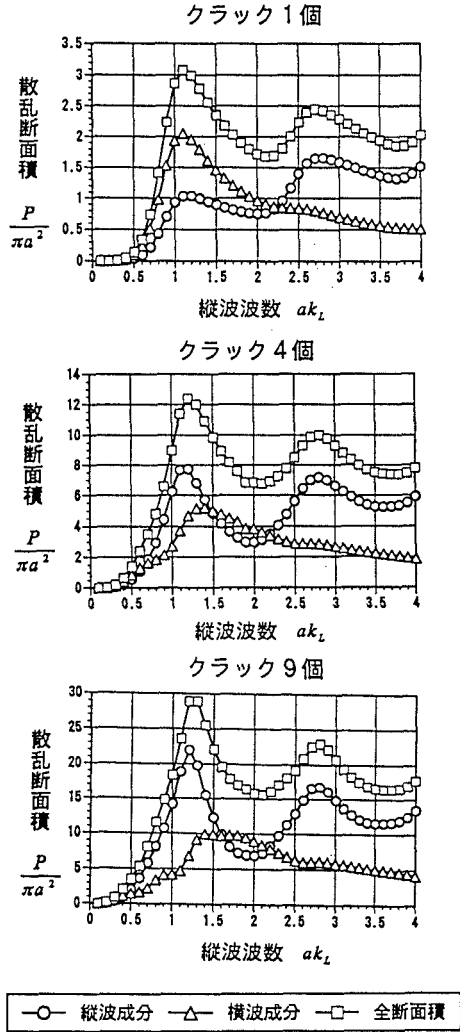


図-3 散乱断面積の比較

6. 結論

クラックを局所的に分布させて配置したモデルとクラック単体モデルとで散乱パワーの比較を行った。その結果、水平方向にクラックを分布させた場合、クラック 1 枚当たりの散乱パワー総量は、クラック単体の場合とほぼ同じであることがわかった。ただし、散乱パワー総量に対する縦波成分と横波成分の分担割合は散乱パワーが最大値をとる波数付近ではかなり変化しており、多重散乱の影響は存在していることに注意を要する。

参考文献

- 1) A.I. Beltzer: The effective dynamic response of random composites and polycrystals - A survey of the causal approach, Wave Motion, Vol.11, pp.211-229, 1989.
- 2) J.E. Gubernatis, E. Domany and J.A. Krumhansl: Formal aspects of the theory of the scattering of ultrasound by flaws in elastic materials, Journal of Applied Physics, Vol.48, pp.2804-2811, 1977.