

鎖モデルによる Saint-Venant の原理の考察

東北大学 学生員 ○武 建勳
(中国鉱業大学)

1. はじめに

「変形する物体に働く荷重を、それと合力、合モメントの等しい別の荷重に置き換えても、その置き換えにより受ける影響は荷重の働いている近傍にとどまり、遠く離れた場合では殆ど影響を受けない」といういわゆる Saint-Venant の原理は1855年提出以来、棒、柱、楔、半平面、半空間のような特殊な場合について成立することを証明されましたが、まだ一般的な証明はなされていない。著者は1987年以来この問題を研究してその一般的な証明をしている。ここではそのやり方を簡単に紹介する。

2. 鎖モデル

二つの力系の差は合力、合モメントが零である平衡力系であるので、Saint-Venant の原理も「平衡力系の影響範囲は作用区域に近いところしかない」と表す。平衡力系ベクトル関数 f_1 を物体の表面の小領域 p_1 に作用させて、互いに交じわらないおよぶ p_1 に交じわらない積分できる滑らか断面 p_2, p_3 を設置する。 p_2 と p_3 を比べる場合の「遠」「近」の概念は断面の番号の大きさで表す。この物体は p_2 と p_3 による三部分に分け、それぞれリンク1, 2, 3 と呼ぶ。ここに p_1 はリンク1に属し、リンク1, 2, 3 は順番に繋がって、鎖モデルという。

この状態のひずみエネルギーを U で表す。 U は f_1 のやった仕事に相当する。

$$U = 0.5 \int_{p_1} f_1 \cdot u_1 ds \quad (1)$$

ここに u_1 は p_1 上に定義する変位ベクトル関数で、 ds は微小面積である。線形弾性体の場合には補足エネルギーも U である。ポテンシャルエネルギーは外力が定数の場合には $U - \int_{p_1} f_1 \cdot u_1 ds = -U$ で表す。

今は p_2 から物体を切断して、リンク1だけに f_1 を作用させ、リンク2+3には外力を作用させないものとする。リンク1のひずみエネルギーを U_{11} で表す。ポテンシャルエネルギーは $-U_{11}$ で表す。

リンク2+3は応力とひずみは零であるが、リンク1の自由な切断面は面力は零で、表面変位 u_2 は零ではない。そして切断面の応力場は連続で、ひずみ場は適合ではないと分かる。一方、 f_1 は全物体に作用する場合には平衡条件と適合条件はどこでも成立する。そして、最小補足エネルギー原理によって $U < U_{11}$ が成立する。同様に、もし p_3 から物体を切断して、リンク1+2だけに f_1 を作用させて得るひずみエネルギーを U_{21} で表すと、 $U < U_{21}$ も成立する。

物体の形状に制限がないので、もしリンク1+2を全体物体として、 p_2 から物体を切断してリンク1だけに f_1 を作用して見ると、 $U_{12} < U_{11}$ が成立することを分かる。そして以下の不等式が得られる。

$$U < U_{21} < U_{11} \quad (2)$$

もし上の例に対し、切断面を固定させて、 p_1 に f_1 を作用して得るひずみエネルギーを U_{11} までは U_{12} と記録すると、切断面の適合条件は満足し、平衡条件は満足しないので、最小ポテンシャルエネルギー原理による以下の不等式が得られる。まだはリンク数 $n > 3$ の場合にも(2), (3) のような関係が成立する。

$$U > U_{12} > U_{11} \quad (3)$$

ここに弾性力学の諸原理は自由な表面でも、一部分の表面は固定しても使うことができると強調する。

以下の三つの p_1 から離れるとともに単調的に減衰する指標を定義する。

$$\bar{W}_i = U_{11} - U \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

$$\bar{W}_i = U - U_{11} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

$$W_i = U_{11} - U_{11} = \bar{W}_i + \bar{W}_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

3. 減衰指標

以上の減衰指標は断面上においても定義できる。切り取ったリンク1を例として検討する。(1)切断面を自由として、 f_1 をリンク1に作用し、生じる変位ベクトル関数は p_1 に u_1 、 p_2 に u_2 と表す。

(2)切断面を固定させて、リンク1に作用させる力関数は f_1 と p_2 に受ける固定力関数 $-f_2$ である。生じる変位ベクトル関数は p_1 に u_1 、 p_2 に $u_2 = 0$ である。

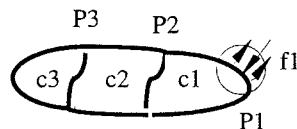


図-1 鎖モデル

(3) f_1 を全物体に作用する場合にはリンク1はリンク2に f_2 を作用して、自分はリンク2から拘束力 $-f_2$ を作用される。 $f_1 + (-f_2)$ を受けて生じる変位ベクトル関数は p_1 に u_1 、 p_2 に u_2 である。

Betti の相反定理を(1),(2)状態に使うと、 $\int_{p_1} f_1 \cdot u'_1 ds = \int_{p_1} f_1 \cdot u'_1 ds + \int_{p_2} (-f_2) \cdot u'_2 ds$ が得られ、さらに $0.5 \int_{p_1} f_1 \cdot u'_1 ds - 0.5 \int_{p_1} f_1 \cdot u'_1 ds = 0.5 \int_{p_2} f_2 \cdot u'_2 ds$ 、そして W_1 を p_2 の上に定義する。

$$W_1 = U_{f1} - U_{r1} = 0.5 \int_{p_2} f_2 \cdot u'_2 ds \quad (7)$$

を得る。ここに $0.5 \int_{p_1} f_1 \cdot u'_1 ds = U_{f1}$ 、 $0.5 \int_{p_1} f_1 \cdot u'_1 ds = U_{r1}$ である。

同様に、Betti 定理を(1),(3)状態や(2),(3)状態に使うと

$$\bar{W}_1 = U_{f1} - U = 0.5 \int_{p_2} f_2 \cdot u'_2 ds \quad (8)$$

$$\hat{W}_1 = U - U_{r1} = 0.5 \int_{p_2} f_2 \cdot u'_2 ds \quad (9)$$

が得られる。

以上の(7)~(9)を検討して、積分号の中に f_2, f_2', u_2, u_2' の組合せによって以下の4番目の指標を定義できる。

$$\hat{W}_1 = 0.5 \int_{p_2} f_2 \cdot u_2 ds \quad (10)$$

式(7)~(9)の定義は切断面が自由または固定であるかを考える必要があるが、それらの情報が無くても表すことができる。例えば、式(8)を書き直してみれば、

$$\bar{W}_1 = 0.5 \int_{p_2} f_2 \cdot u'_2 ds = 0.5 \int_{p_2} (-f_2) \cdot (u_2 - u'_2) ds + 0.5 \int_{p_2} f_2 \cdot u_2 ds = W_1^* + \hat{W}_1 \quad (11)$$

ここに W_1^* は $(-f_2)$ が自由なリンク1に作用して生じるひずみエネルギーである。さらに「 $\bar{W}_1$ は物体を p_2 から切断して、切断する前 f_1 の作用によって切断面に生じた内力を二つの切断面に作用して生じるひずみエネルギーの和である」とも定義できる。このように定義される指標はZanabini(1937)が別の方法で発見したのである。

4. Saint-Venant の原理

定義(7)~(10)によって $W_1, \bar{W}_1, \hat{W}_1, \hat{W}_1$ は物体の断面の応力や変位の平均強度の指標として使うことができる。 $f_2 = 0$ の場合に $\bar{W}_1 = 0$ 、 $\hat{W}_1 = 0$ で、 $u_2 = 0$ の場合に $\bar{W}_1 = 0$ 、 $\hat{W}_1 = 0$ で、 $f_2 = 0$ かつ $u_2 = 0$ の場合に $W_1 = 0$ である。逆にもし $W_1 = 0$ が成立すれば式(6)によって断面 p_2 を自由としても固定としても殆ど変化はなく、つまり $f_2 = 0$ かつ $u_2 = 0$ を意味するものである。伝統的な Saint-Venant の原理は、応力は小さい、つまり $f_2 = 0$ だけについて論述したのであるが、まだ $u_2 = 0$ について別の原理が存在するべきではないかという疑問がある。著者は指標 W_1 を選んだ。その理由は1) $f_2 = 0$ と $u_2 = 0$ に対する対称である;2)断面より遠いリンクによらなくても W_1 を決められる;3)さらに以下に述べる検討をすれば非常に便利である。そして Saint-Venant の原理を

「平衡力系 f_1 の作用領域 p_1 から十分遠く離れる断面の上において $W_1 \approx 0$ (以上の $W_1 = 0$) である」で表すと提案する。

5. 減衰の速さ

異なる物体の減衰の速さ、つまり図-3に表す二つの曲線の接近する速度は異なる。減衰の速さは物体の形状、構造に基づいて検討するべきである。減衰の速さは鎖モデルの諸リンクの正定性によって決められるのである。著者は構造力学を用いて鎖モデルを検討してマトリックス連分式理論(1991)を提出し、その後厳密な operator 連分式理論(1993)を提出した。鎖モデルにおける減衰の速さは operator 連分式の純数学性質であると結論した。

得られた結果は Saint-Venant の原理の予想と違う点がある、構造によって平衡力系の影響範囲は無限遠いところに及ぶ可能性がある。しかし、実用の構造に限り Saint-Venant の原理は成立すると確認された。

参考資料

- 武建勳&堤一：離散系に関する Saint-Venant の原理の反例、(日本)建築学会構造系論文報告集、347号、57-62(1987)
 武建勳&堤一：Saint-Venant の原理の証明に関する検討、(中国)固体力学学报、11(2),148,157(1990)
 武建勳：計算力学中の静力減衰、(中国)応用力学と数学、12(4),321-330(1991)
 武建勳：Saint-Venant の原理と operator 連分式、(中国)工程力学(増刊)、254-259(1993)

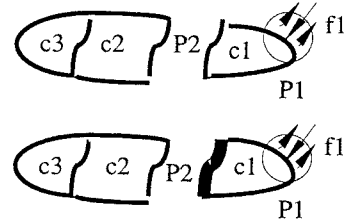


図-2 切断面の自由、固定な状態

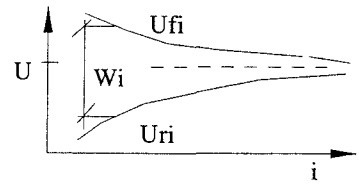


図-3 減衰指標 W_i