

分布欠陥による波動の分散特性について

○ 東北大学 学生員 岸部大蔵
東北大学 正員 北原道弘

1. はじめに

欠陥が弾性体中に分布して存在する場合、この弾性体中を伝播する波動場は欠陥により散乱され、散乱に伴って波動場は減衰と分散性を示す。逆に、この散乱減衰と分散を定量化することにより、欠陥の分布状態に関する情報を抽出する手法について考えたい。散乱減衰を特徴付けるパラメータは波動場の振幅が距離と共に指数関数的に減少するオーダーを支配する散乱減衰係数であり、分布欠陥中の波動場において散乱減衰は周波数に依存する。一方、分散を特徴付ける物理量が波速であり、これも周波数に依存する。

分布欠陥の存在により生じた散乱波のパワーが散乱減衰と直接的に関係するため、まず散乱パワーと減衰について要約する。散乱減衰は因果律を介して波速と関係しており、欠陥が球形キャビティーである場合について、分布率と散乱減衰の関係、波速の周波数依存性に関する解析結果を示す。

2. 散乱パワー

散乱体の存在により全方向に散乱された散乱波が有するパワーを入射波の進行方向に垂直な投影断面積に換算して表現したものは散乱断面積と呼ばれている¹⁾。ここでは、散乱パワーに係わる定義を要約する。

波動の伝播方向を表す単位ベクトル $\mathbf{p}$ に垂直な単位面積、単位時間当たりのエネルギー（インテンシティー）は次のように書ける。

$$I = p_i \sigma_{ij} \dot{u}_j \quad (1)$$

ここに、 σ_{ij} は応力、 $\dot{u}_j$ は変位の時間微分である。いま、図-1に示すように入射波として x_3 軸方向に進む平面波を考えれば、この入射波 $\mathbf{u}^I$ が有するインテンシティーは

$$I^I = \sigma_{3j}^I \dot{u}_j^I \quad (2)$$

となる。また、単位法線 $\hat{\mathbf{n}}$ を持つ表面 A を通過する散乱波 $\mathbf{u}^S$ が有するパワー（単位時間当たりのエネルギー）は、散乱波成分について式(1)を積分して次のようになる。

$$P^S = \int_A \hat{n}_i \sigma_{ij}^S \dot{u}_j^S dA \quad (3)$$

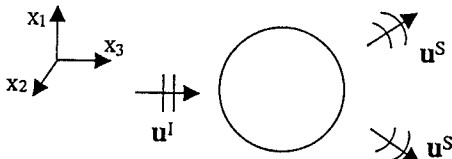


図-1 入射波と散乱波

いま、弾性散乱断面積 $P(\omega)$ を、入射波の時間平均イ

ンテンシティー $\langle I^I \rangle$ に対する全方向に散乱された散乱波の時間平均パワー $\langle P^S \rangle$ の比として、次のように定義する。

$$P(\omega) = \frac{\langle P^S \rangle}{\langle I^I \rangle} \quad (4)$$

ここに、 ω は角振動数であり、 $\langle \cdot \rangle$ は次の時間平均を表す。

$$\langle g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt \quad (T: \text{周期}) \quad (5)$$

3. 散乱減衰

図-2に示すように弾性母材内に形状、大きさの同じ球形キャビティーがランダムに分布して存在している場合を考える。

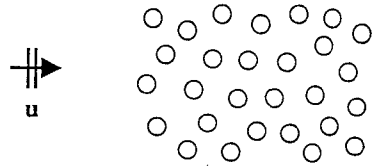


図-2 球形キャビティーと波動場 u

いま、球形キャビティーの波動特性を調べるために複素波数を次のように導入する。

$$k_L(\omega) = \omega/c_L(\omega) + i\alpha(\omega) \quad (6)$$

この表現において、 $c_L(\omega)$ が位相速度、 $\alpha(\omega)$ が散乱減衰係数である。いま、 x_3 軸方向に伝播する平面波動場は次のように書ける。

$$u(x) = \bar{u}(x_1, x_2) e^{-\alpha(\omega)x_3} e^{i[(\omega/c_L(\omega))x_3 - \omega t]} \quad (7)$$

上記波動場(7)の時間平均インテンシティーは式(2)を参考にして次のように求まる。

$$\langle I \rangle = \langle I_0 \rangle e^{-2\alpha(\omega)x_3} \quad (8)$$

ここに、 $\langle I_0 \rangle$ は $x_3 = 0$ における時間平均インテンシティーである。

一方、インテンシティーの変化量が個々の散乱体により散乱されたパワーの減少量に等しいことと、式(4)から、以下のように波動の進行方向のインテンシティーの変化量を支配する微分方程式が得られる。

$$\frac{d\langle I \rangle}{dx_3} + \sum_{k=1}^n P_k(\omega) \langle I \rangle = 0 \quad (9)$$

ここで、 n は単位体積中の球形キャビティーの個数であり、 $P_k(\omega)$ は k 番目の散乱体による散乱断面積である。この方程式の解は次のように求まる。

$$\langle I \rangle = \langle I_0 \rangle e^{-\sum_{k=1}^n P_k(\omega)x_3} \quad (10)$$

いま、式(8)と式(10)から、散乱減衰係数は次のようになる。

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n P_k(\omega) \quad (11)$$

上式(11)において、 n はランダム量であり、 P_k は球形キャビティの大きさを特徴付けるランダム変数に依存している。いま、ランダム量の独立性を仮定し、無限個の集合平均（現実的には空間平均）を取れば次のようになる。

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2} NP(\omega) \quad (12)$$

ここで、 N は単位体積中の球キャビティの平均個数であり、 $\alpha(\omega)$ も平均的な意味に解釈する。

球形キャビティの半径が a の場合、体積分率 ϕ と単位体積中の平均個数 N の関係は次のようになる。

$$\phi = \frac{4}{3} \pi a^3 N \quad (13)$$

上式(13)を用いて式(12)を書き直すと

$$\alpha(\omega)a = \frac{3\phi}{8} \frac{P(\omega)}{\pi a^2} \quad (14)$$

となる。上式より、平均半径 a は既知として一個の球形キャビティによる散乱断面積 $P(\omega)$ を計算で求め、体積分率 ϕ を与えることにより散乱減衰率 $\alpha(\omega)$ を決めることができる。逆に、散乱減衰率 $\alpha(\omega)$ を計測等により決定できれば、体積分率 ϕ を推定することが可能である。

球形キャビティがポアソン比 $\nu = 0.333$ の母材内に分布した場合の散乱減衰率を図-3に示す。

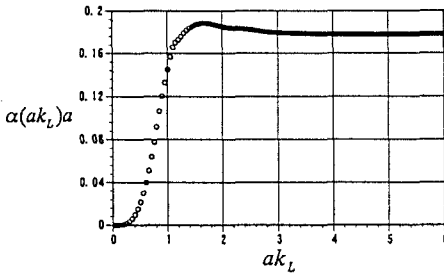


図-3 散乱減衰率(体積分率： $\phi = 0.2$)

4. 位相速度

Kramers-Kronig(K-K) 関係を利用すると散乱減衰量から位相速度が求められる。このK-K 関係は縦波が伝播している場合、縦波の位相速度 $c_L(\omega)$ について次のように書ける²⁾。

$$c_L(\omega) = c_L^0 \left[1 + \frac{2\omega^2 c_L^0}{\pi} P\nu \int_0^\infty \frac{\alpha(\omega') d\omega'}{\omega'^2 (\omega'^2 - \omega^2)} \right]^{-1} \quad (15)$$

ここで、 $\alpha(\omega)$ は式(12)の散乱減衰であり、 c_L^0 は $c_L(\omega)$ の静的極限である。

$$c_L^0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} c_L(\omega) \quad (16)$$

式(16)の関係を弾性母材の縦波数 $k_L = \omega/\bar{c}_L$ （ここに、 $\bar{c}_L$ は母材の縦波速度）を用いて書き直すと次のようになる。

$$c_L(k_L) = c_L^0 \left[1 + \frac{2k_L^2 c_L^0}{\pi} P\nu \int_0^\infty \frac{\alpha(k'_L) dk'_L}{k_L'^2 (k_L'^2 - k_L^2)} \right]^{-1} \quad (17)$$

球形キャビティがポアソン比 $\nu = 0.333$ の母材内に分布した場合について縦波の位相速度を式(17)より求め、図-4に今回の解析結果と Beltzer²⁾の結果の比較を示す。また、図-5に球形キャビティの体積分率 $\phi = 0.05, 0.1, 0.2$ と変化させた場合の結果を示す。

K-K 関係式(17)の計算において、位相速度 $c_L(\omega)$ の静的極限 c_L^0 の値を必要とすることに注意を要す。静的問題における均質化に関しては既に多くの研究がなされており、ここでは文献^{3),4)}を参考にした。

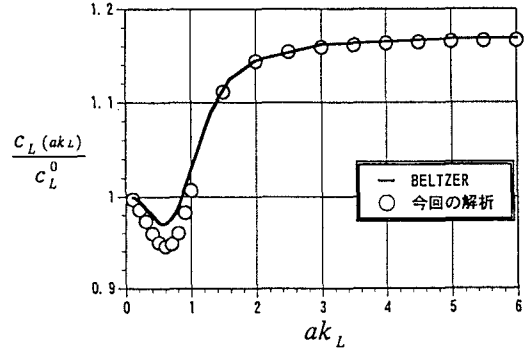


図-4 位相速度(体積分率： $\phi = 0.2$)

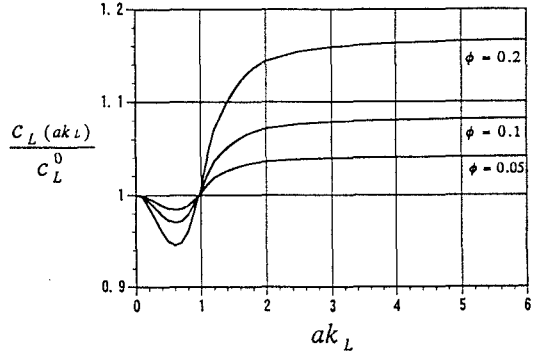


図-5 位相速度(体積分率： $\phi = 0.05, 0.1, 0.2$)

参考文献

- 1) Gubernatis, J.E., Domany, E. and Krumhansl, J.A.: Formal aspects of the theory of the scattering of ultrasound by flaws in elastic materials, J. Appl. Phys., Vol.48, pp.2804-2811, 1977.
- 2) Beltzer, A.I.: The effective dynamic response of random composites and polycrystals - a survey of the causal approach, Wave Motion, Vol.11, pp.211-229, 1989.
- 3) Hashin, Z.: Analysis of composite materials - a survey, J. Appl. Mech., Vol.50, pp.481-505, 1983.
- 4) Hill, R.: A self-consistent mechanics of composite materials, J. Mech. Phys. Solids, Vol.13, pp.213-222, 1965.