

分岐理論に基づく2次元周期領域のパターン形成シミュレーション

○東北大学工学部 学生員 加藤 和弘
 東北大学工学部 正会員 池田 清宏
 東北大学工学部 正会員 寺田 賢二郎

1. はじめに

均質材料を用いた三軸圧縮試験やねじりせん断試験の供試体表面にはよく特徴的なせん断帯やパターンを観察することができる。これらのパターンの発生、変化に関して池田¹⁾らは群論的分岐理論に基づいた対称性の階層的崩壊による多段階分岐理論を提唱している。そこで本研究は、周期境界を持った長方形領域の変形パターンシミュレーションを行い、多段階の分岐挙動と群論的分岐理論との整合性の確認することを目的とする。

2. 長方形領域の代表的分岐パターン

領域の境界の影響を除くために、長方形領域の両端には周期的な境界条件を付加し、滑らかにつながっていると仮定する。この場合の分岐構造を池田らが Fourier 級数項を用いて以下のように示している。

(1) 主経路からの分岐解

主経路からは、以下の3種類のパターンの方向に分岐解が存在する。

Diamond Pattern ($DI_{n\tilde{n}}$)

$$\left. \begin{aligned} w &= A_{n\tilde{n}} \cos\left(\frac{2\pi nx}{L_x}\right) \cos\left(\frac{2\pi \tilde{n}y}{L_y}\right) \quad , \quad w = B_{n\tilde{n}} \sin\left(\frac{2\pi nx}{L_x}\right) \sin\left(\frac{2\pi \tilde{n}y}{L_y}\right) \\ w &= C_{n\tilde{n}} \sin\left(\frac{2\pi nx}{L_x}\right) \cos\left(\frac{2\pi \tilde{n}y}{L_y}\right) \quad , \quad w = D_{n\tilde{n}} \cos\left(\frac{2\pi nx}{L_x}\right) \sin\left(\frac{2\pi \tilde{n}y}{L_y}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

Oblique Stripe Pattern ($OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$)

$$w = A_{n\tilde{n}} \cos\left(2\pi\left(n\frac{x}{L_x} \pm \tilde{n}\frac{y}{L_y}\right)\right) \dots\dots\dots (2)$$

Another Oblique Stripe Pattern ($OB_{n\tilde{n}}^{\pm\circ}$)

$$w = A_{n\tilde{n}} \cos\left(2\pi\left(n\frac{x}{L_x} \pm \tilde{n}\frac{y}{L_y}\right)\right) + B_{n\tilde{n}} \sin\left(2\pi\left(n\frac{x}{L_x} \pm \tilde{n}\frac{y}{L_y}\right)\right) \dots\dots\dots (3)$$

(2) $OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$ 不変経路と $OB_{n\tilde{n}}^{\pm\circ}$ 不変経路からの分岐解

$OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$ 不変経路からの分岐解には、式(4)~(6)で示される分岐経路が存在する。また、 $OB_{n\tilde{n}}^{\pm\circ}$ 不変経路からの分岐解には、式(6)、式(7)で示される分岐経路が存在する。

Oblique Stripe Pattern ($OB_{m\tilde{m}}^{\pm}$)

$$w = \sum A_{m\tilde{m}} \cos\left(2\pi\left(m\frac{x}{L_x} \pm \tilde{m}\frac{y}{L_y}\right)\right) \dots\dots\dots (4)$$

ここで $m, \tilde{m}$ は $n/m = \tilde{n}/\tilde{m} \geq 2$ を満たす整数である。

Echelon Mode ($EC_{m\tilde{m}}^{\pm}$)

$$w = \sum A_{m\tilde{m}} \cos\left(2\pi\left(m\frac{x}{L_x} \pm \tilde{m}\frac{y}{L_y}\right)\right) \dots\dots\dots (5)$$

ここで $m, \tilde{m}$ は $-n\tilde{m} \pm m\tilde{n} = kj$ (j は整数) を満たす整数である。

Another Oblique Stripe Pattern ($OB_{m\tilde{m}}^{\pm\circ}$)

$$w = \sum A_{m\tilde{m}} \cos\left(2\pi\left(m\frac{x}{L_x} \pm \tilde{m}\frac{y}{L_y}\right)\right) + \sum B_{m\tilde{m}} \sin\left(2\pi\left(m\frac{x}{L_x} \pm \tilde{m}\frac{y}{L_y}\right)\right) \dots\dots\dots (6)$$

ここで $m, \tilde{m}$ は $n/m = \tilde{n}/\tilde{m} \geq 2$ を満たす整数である。

Another Echelon Mode ($EC_{m\tilde{m}}^{\pm\circ}$)

$$w = \sum A_{m\tilde{m}} \cos\left(2\pi\left(m\frac{x}{L_x} \pm \tilde{m}\frac{y}{L_y}\right)\right) + \sum B_{m\tilde{m}} \sin\left(2\pi\left(m\frac{x}{L_x} \pm \tilde{m}\frac{y}{L_y}\right)\right) \dots\dots\dots (7)$$

ここで $m, \tilde{m}$ は $-n\tilde{m} \pm m\tilde{n} = kj$ (j は整数) を満たす整数である。

3. 解析方法

(1) 解析モデル

解析モデルは、 $q(x, y) = -kw$ の反力を受ける線形バネによって支持される、 $L_x \times L_y \times t$ の長方形板とする。この板に x 軸方向面内一軸に一様圧縮力 N が作用する場合を考える。

(2) ポテンシャル関数

このモデルに対するひずみの高次項まで考慮したポテンシャル関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} U = & \frac{D}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \right] dx dy + \frac{3D}{2t^2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ & + \frac{k}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} w^2 dx dy - \frac{2\pi^2 D}{L_y^2} f \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここで、 E はヤング率、 ν はポアソン比、 D は曲げ剛性、 t は板厚である。また、荷重パラメータとして $f = (L_y N) / (a \pi^2 D)$ と無次元化したものを用いる。

(3) 2重 Fourier 級数による離散化

このモデルの z 方向の変位 $w(x, y)$ を 2 重 Fourier 級数により離散化する。

$$w = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left[A_{pq} \sin\left(\frac{2\pi px}{L_x}\right) \sin\left(\frac{2\pi qy}{L_y}\right) + B_{pq} \cos\left(\frac{2\pi px}{L_x}\right) \cos\left(\frac{2\pi qy}{L_y}\right) + C_{pq} \sin\left(\frac{2\pi px}{L_x}\right) \cos\left(\frac{2\pi qy}{L_y}\right) + D_{pq} \cos\left(\frac{2\pi px}{L_x}\right) \sin\left(\frac{2\pi qy}{L_y}\right) \right] \dots \quad (9)$$

この離散化された変位を用いて式 (8) のポテンシャル関数を表し、ポテンシャルエネルギー停留の原理により、釣り合い式、接線剛性行列の誘導を行う。この釣り合い式を Newton-Raphson 法により解き、荷重-変位関係を求める。また、固有値解析から分岐点を求める。

4. 解析結果

解析は、低次のモードが発生するケース 1 と、高次のモードのケース 2 について行った。ここでの荷重変位関係については、荷重パラメータ f と、長方形板上の点 $(x, y) = (0.35, 0.31)$ における変位 w を板厚 t で割った無次元量 w/t で表した。

ケース 1 図-1 にケース 1 で求めた荷重変位曲線を示す。ここでは Fourier 級数項として 1 次から 6 次までを用いた。

自明解である $w = 0$ の主経路上の 4 重分岐点から、ダイヤモンドパターンとストライプパターンがそれぞれ同時に分岐しているのが確認できる。図-3 に OB_{21}^+ の変形モードを示す。

ケース 2 図-2 にケース 2 で求めた荷重変位曲線を示す。ここでは Fourier 級数項として 5 次から 10 次を用いた。

ここでもダイヤモンドパターンとストライプパターンが同時に分岐しているのを確認できた。さらに、主経路からの分岐経路であるストライプパターンからさらにエシェロンモードが分岐するという 2 段階にわたる分岐の様子が確認できた。

その例として、図-4 に OB_{98}^+ からの分岐経路である $EC_{9,8,111,0}$ の変形モードを示す。

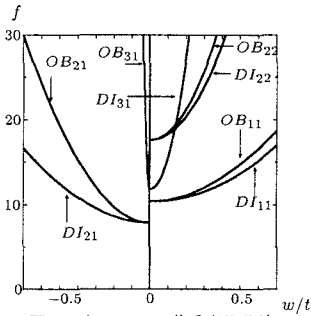


図-1 ケース 1 の荷重変位曲線

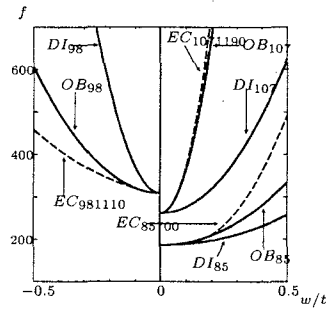


図-2 ケース 2 の荷重変位曲線

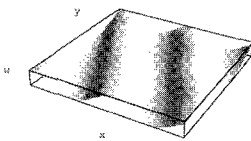


図-3 OB_{21}^+ の変形モード

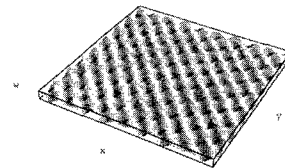


図-4 $EC_{9,8,111,0}$ の変形モード

5. 結論

本研究では、周期境界を持つ 2 次元領域の変形が、群論的分岐理論と整合する多段階的分岐パターンを持つことが確認できた。これは、板に初期不整が入っていない完全系の場合にのみ話を限定しているものであるが、実際の構造物には完全系は存在せず常に何らかの初期不整を含んでいると考えられる。したがって、今後の課題としては、初期不整を考慮して解析範囲を不完全系にまで拡張することで実現象における初期不整の荷重に対する影響と分岐パターンとの関係を解析することである。

参考文献

- 1) Ikeda, K. Murota, K. and Nakano, M.: Echelon modes in uniform materials. International Journal of Solids and Structures. 31, 2709-2733, 1994.