I －32

非圧縮性流れのための安定化有限要素法について

八戸工業高等専門学校　学生員 ○加藤 修
八戸工業高等専門学校　正　員　丸岡 晃

1. はじめに

非圧縮性流れにおける安定化有限要素法は、数値流体解析において Galerkin 法を適用した場合に問題となる不安定性を解消する手法であり、精度面でも優れているため、近年注目されている。安定化有限要素法では陰的な離散化が行われるため、大規模な非線形の連立方程式をいかに効率的に解くかが問題となる。そこで本研究では、Matrix-free 法に基づく安定化有限要素法で扱う反復法の収束について、物体まわりの流れを取り上げ主な検討を行なった。

2. 解析手法の概要

支配方程式は、非圧縮性粘性流れの Navier-Stokes 方程式で、運動方程式と非圧縮性の連続式より、以下のように表される。

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}-\mathbf{f}\right)+\nabla p-\mu\nabla^2\mathbf{u}=\mathbf{0} \qquad (1)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0 \qquad (2)$$

ここで、$\mathbf{u}$ は流速、p は圧力、$\mathbf{f}$ は外力、ρ は流体の密度、μ は粘性係数である。

上式を安定化有限要素法[1]により離散化する。本手法は、標準的な Galerkin 法による項と安定化項の組み合わせにより得られる。安定化項は、厳密解によって消去される運動方程式と連続式の残差に重み付けられているので、定式化の整合性が損なわれることはない。なお、安定化有限要素法の場合、時間方向にも有限要素法を用いる space-time 法[1]が適用されることが多いが、本研究では時間積分に差分近似を行なう Semi-discrete 法[2]を用いる。

安定化有限要素法による離散化により、以下に示す非線形の連立方程式が導かれる。

$$\mathbf{N}(\mathbf{d}_{n+1})=\mathbf{0} \qquad (3)$$

ここで、$\mathbf{d}_{n+1}$ は時刻 $n+1$ に対応する流速と圧力の節点量である。式(3)に Newton-Raphson(NR)法による反復法を適用すると以下のようになる。

$$\left.\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{d}}\right|_{\mathbf{d}^k_{n+1}}\Delta\mathbf{d}^k_{n+1}=-\mathbf{N}\left(\mathbf{d}^k_{n+1}\right) \qquad (4)$$

ここで、$\mathbf{d}^k_{n+1}$ は反復回数 k の $\mathbf{d}_{n+1}$ の値であり、$\Delta\mathbf{d}^k_{n+1}$ は $\mathbf{d}^k_{n+1}$ の補正量である。$\left.\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{d}}\right|_{\mathbf{d}^k_{n+1}}$ はヤコビアン行列である。式(4)は、$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ というような線形の連立方程式に置き換えられ、NR 法の反復ごとに解くことになる。行列 $\mathbf{A}$ は大規模な非対称行列になるため、反復法が有効である。

反復法の計算では行列-ベクトル積 $\mathbf{Ax}$ の計算が必要とされる。element-by-element 法を用いると、次式のように要素ごとの行列 $\mathbf{A}^e$ を計算し、要素ごとのベクトル $\mathbf{x}^e$ との積を全体系に重ね合せることにより、全体系の行列 $\mathbf{A}$ の記憶を必要としない。

$$\mathbf{Ax}=\sum_{e=1}^{n_e}\mathbf{A}^e\mathbf{x}^e \qquad (5)$$

さらに、Matrix-free 法では反復法の内部における要素ごとの行列-ベクトル積 $\mathbf{A}^e\mathbf{x}^e$ の重ね合せを行なっているループ内で要素ごとの行列 $\mathbf{A}^e$ を作成する。これにより、要素ごとの行列さえも記憶する必要がなくなり、大規模な問題への対応が可能となる。

本研究では反復法に Matrix-Free 法に基づく GMRES 法[1]を適用する。GMRES 法は Kryrov ベクトルを求める Inner ループとリスタートのための Outer ループにより構成される。

本手法では、NR 法により式(3)の非線形の連立方程式に対する収束を必要とする。よって、NR 法の反復と内部の GMRES 法の反復をバランスさせて全体の収束を得らなければならない。そこで本研究では、GMRES 法の計算に収束判定基準を設けず、Innner と Outer のループの反復数を一定に設定して計算を行なっている。

3. 数値解析例

本研究では、NR 法の各反復ごとにおける GMRES 法の Inner と Outer の反復数の設定について図-1 に示す辺長比 1 の二次元角柱まわりの流れを取り上げ、検討を行なう。要素分割は三角形一次要素を用い、総節点数 20360、総要素数 40064 である。Reynolds 数は 100、1000 とする。各反復数は表-1 に示す 5 種類とする。時間増分は 0.05 とする。なお、本研究では NR 法に

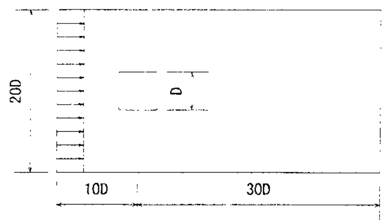

図-1　解析領域

表-1　GMRES 及び NR の反復数

	NR	GMRES		Total
		Inner	Outer	
ケース 1	16	10	1	160
ケース 2	16	10	2	320
ケース 3	16	10	4	640
ケース 4	16	20	1	320
ケース 5	16	40	1	640

対する収束判定基準は用いず、16 回の反復数を繰り返した後、次のステップの計算を進めた。

図-2 に、Re=100 における圧力図を示す。図-3A、B は Re=100 および Re=1000 における NR 法の反復による残差ノルムの基準値($||r_k||/||r_0||$)の収束を表したもので、十分に発達した流れを初期条件とし、100 回の平均を求めたものである。図-3A より、ケース 2~5 ともほぼ同様の収束が得られた。ケース 1 の場合、NR 法の反復数を増やすことにより、ケース 2~5 と同程度の精度を見せた。なお、どのケースも収束に限界があり、約 $10^{-3.7}$ 以下にはならなかった。図-3B より、ケース 1 は約 $10^{-2.7}$、ケース 2 は約 $10^{-3.0}$ まで下がった。ケース 3 の場合、ケース 1、2 の間を振動しながら収束した。ケース 4、5 の場合、漸近的な収束は得られなかった。なお、ケース 5 については計算を継続するとすると解は発散した。

Re=100 および Re=1000 とも、Inner ループを 10 回としたケース 1、2 の計算は漸近的な収束が得られた。両方を比較すると、ケース 2 のほうが早く収束している。トータルの反復数に着目すると、Re=1000 の場合のケース 5 ように反復数を多くしても必ずしも良い結果が得られるとは限らず、同じ反復数でもケース 3 のように収束する場合がある。これは GMRES 法により Kryrov ベクトルの計算を行なう際、Kryrov ベクトルの次元を多くとることによって、誤差が累積したためにこのような結果になったと考えられる。なお、今回用いた 5 ケースの中では、ケース 2 が最も効果的な収束が得られた。

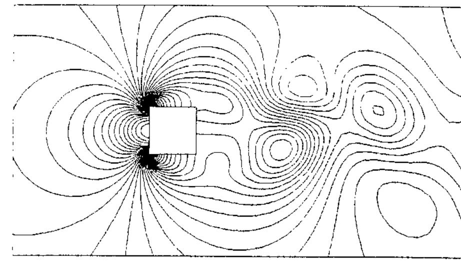

図-2　圧力分布図(Re=100)

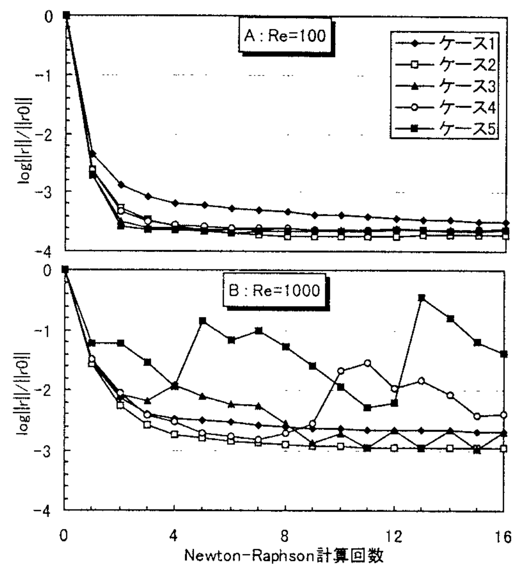

図-3　反復数と残差ノルムの収束の関係

4. おわりに

本研究は、非圧縮性粘性流れのための安定化有限要素法について、物体まわりの流れを取り上げ主な検討を行なった。以下に本研究の結果をまとめる。

NR 法の反復計算による収束は、Reynolds 数などの計算条件に依存する有限な精度を持っていることがわかった。また、精度は内部の GMRES 法の反復数にも依存し、必ずしも内部の反復数を多くすれば良いというわけではない。よって、NR 法の収束判定条件の決定には十分な注意を要する必要がある。そのため、解析事例を蓄積することによって、計算条件と NR 法の精度の関係を明らかにすることが今後の課題といえる。

参考文献

[1]M.Behr and T.E.Tezduyar , "Finite element solution strategies for large-scale flow simulations" , *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , 112 , 3-24 (1994)

[2]V.Kalro and T.E.tezduyar , " Parallel finite element computation of 3D incompressible flow on MPPs " , in W.G.Habashi , editor , *Solution Techniques for Large-Scale CFD problems* , 59-81 , John Wiley & Sons , (1995)