

梁の三次元有限変位の定式化の精度について

東北大学工学部

○学生員 桑高 崇

東北大学大学院工学研究科

正 員 岩熊 哲夫

東北大学大学院工学研究科

正 員 後藤 文彦

1. まえがき

梁の三次元有限変位解析では、何等かの回転群を用いて座標変換を記述する必要があるが、回転自由度もこれに準ずる。軸性の回転疑似ベクトルとして扱えるために座標変換することのできる主軸角が、回転自由度としては最も多用されているが、回転疑似ベクトルで記述した座標変換行列の成分は特異点を有し、また増分式は非常に煩雑になる。オイラー角を回転自由度とした場合、ベクトルとして扱えないオイラー角を座標変換することができず、曲がり梁を解析できないが、オイラー角で記述した座標変換行列の成分は特異点を含まず、増分式も比較的簡潔である。一方、座標変換をオイラー角で記述しつつも、回転自由度に空間固定三軸回りの微小回転角を用いれば、曲がり梁を解析することも可能となる。本研究では、そのような座標変換と回転自由度に用いる回転角の組み合わせが、精度、解析対象の制約、定式化の煩雑さなどの面に与える影響を考察する。

2. 定式化

図-1のように変位 d と相対変位 r を定義し、外力 f のモーメント成分は回転自由度に用いる回転群と仕事をする成分として定義する。これらの局所系での表現は上付添字 ℓ で表すことにすると、仮想仕事の式 $f^T \delta d = f^{\ell T} \delta r^{\ell}$ より、全体系の外力と局所系の外力を結びつける関係式 $f = R^T f^{\ell}$ が得られる。これに局所系で成り立つ線形理論の剛性方程式 $f^{\ell} = K r^{\ell}$ を代入すれば、剛性方程式 $f = R^T K T^T r$ が得られ、これの d に関する増分式

$$\Delta f = K_{t1} \Delta d \quad (1)$$

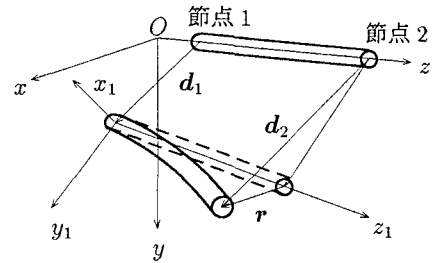


図-1 梁要素の変形

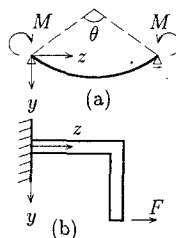
が接線剛性方程式となる¹⁾。座標変換行列 T と変位ベクトル d の回転自由度に共に回転群を用いる場合は、式(1)を用いればよい。回転自由度に空間固定三軸回りの微小回転角 $(\Delta\theta_x, \Delta\theta_y, \Delta\theta_z)$ を用いる場合は、これを回転自由度とする変位ベクトル増分 $\Delta\bar{d}$ と回転群を回転自由度とする変位ベクトル増分 Δd との変換式 $\Delta d = S \Delta\bar{d}$ を仮想仕事式に考慮して剛性方程式 $\bar{f} = S^T R^T K T^T r$ を得る。ここに $\bar{f}$ はモーメント成分が空間固定三軸回りの成分で定義される外力ベクトルである。この式の d に関する増分を取った後、 $\Delta d = S \Delta\bar{d}$ を代入することにより、次の接線剛性方程式を得る¹⁾。

$$\Delta f = \left[\frac{\partial S^T}{\partial d} R^T K T^T r S + S^T K_{t1} S \right] \Delta\bar{d} = K_{t2} \Delta\bar{d} \quad (2)$$

回転自由度に $(\Delta\theta_x, \Delta\theta_y, \Delta\theta_z)$ を用いる場合は、式(2)を用いればよい。以上の定式化で数値解析を行うが、座標変換にオイラー角、回転疑似ベクトルを用いた場合の接線剛性行列をそれぞれ K_t^E 、 K_t^P と表す。

3. 円弧アーチの横倒れ座屈

座標変換にオイラー角を用いても、回転自由度に固定三軸回りの回転角を用いれば曲がり梁を解析できることはまえがきで述べたが、これが、座標変換と回転自由度の両者に回転疑似ベクトルを用いた通常の定式化に比べて精度に問題があるかどうかを検討する。



$$\begin{aligned} E &= 2.00 \times 10^8 \text{ N/m}^2 & I_x &= 1.1363 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \\ G &= 77.2 \times 10^8 \text{ N/m}^2 & I_y &= 3.871 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \\ l &= 10.244 \text{ m} & J &= 5.89 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \\ A &= 9.288 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= 7.124 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 & I_x &= 1.35 \times 10^{-9} \text{ m}^4 \\ G &= 2.719 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 & I_y &= 5.40 \times 10^{-13} \text{ m}^4 \\ A &= 1.80 \times 10^{-2} \text{ m}^2 & J &= 2.16 \times 10^{-12} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

図-2 解析モデル

ここでは、解析解²⁾の存在するアーチの横倒れ座屈を解析するが、上付添字の $E1$ や $P1$ は相対回転角の成分 (S^{-1} の成分に相当) を要素の一端の値だけで記述したことを意味し、 $E2$ は要素の両端の平均を用いて記述したことを意味する。解析モデルは図-2 に示す。図-3 に中心角 60° のアーチの解析解への収束状況を、表-1 には 65 要素での解析解に対する相対誤差を示す。少ない要素数では、 K_{t2}^{E2} は K_{t2}^{E1} 、 K_{t1}^{P1} よりも精度が落ちるが、要素数を増やせば十分な精度が得られることが分かる。また、中心角が大きく曲線近似が粗い条件での精度は K_{t2}^{E1} に比べて良くなる。因みに、 K_{t2}^{E1} 、 K_{t2}^{E2} 、 K_{t1}^{P1} の増分式のサブルーチンの容量はそれぞれ、15KB、18KB、450KB であり、 K_{t2}^{E2} でも K_{t1}^{P1} に比べれば十分に容量は小さい。

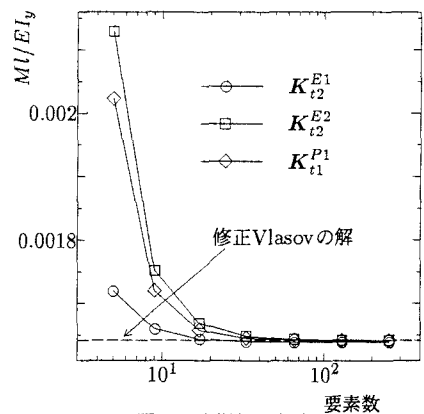


図-3 座屈解の収束

4. L 型片持ち梁の横倒れ座屈

K_{t2}^{E2} がアーチの横倒れ座屈に対して、 K_{t1}^{P1} と同程度の精度を与えることが分かったので、回転疑似ベクトルを自由度とした既存の数値解が存在する L 型片持ち梁の座屈後の挙動を K_{t2}^{E2} で解析してみる。解析モデルは、同じく図-2 に示す。荷重と先端部の面外変位の関係を Crisfield³⁾の解、Simo ら⁴⁾の解とともに図-4 に示す。本解析では座屈荷重は 1.088(N) と求まり、Simo らの 1.09(N) とほぼ一致している。また、座屈点付近うまく計算する事ができた。座屈後挙動は、Simo らの結果と比べると本数値解はやや小さめであるが、Crisfield の結果とはほぼ一致している。

表-1 相対誤差 (65 要素) (%)

中心角 θ	K_{t2}^{E1}	K_{t2}^{E2}	K_{t1}^{P1}
30°	-0.172	0.047	0.045
60°	-0.174	0.084	0.016
90°	-0.434	0.097	-0.017
120°	-1.757	0.118	-0.129
150°	-8.545	0.119	-0.484

5. まとめ

座標変換と回転自由度に回転疑似ベクトルを用いた一般的な定式化と、座標変換にはオイラー角、回転自由度には固定三軸回りの回転角を用いた定式化とを導出した。解析解の存在するアーチの座屈を解析したところ、オイラー角と固定三軸回りの回転角を用いた定式化は、回転疑似ベクトルのみを用いた定式化と同程度の結果を与えることが分かった。そこで、オイラー角と固定三軸回りの回転角を用いた定式化で、L 型片持ち梁の座屈後挙動を解析してみたところ、回転疑似ベクトルを自由度として計算した既存の数値解とほぼ一致した。

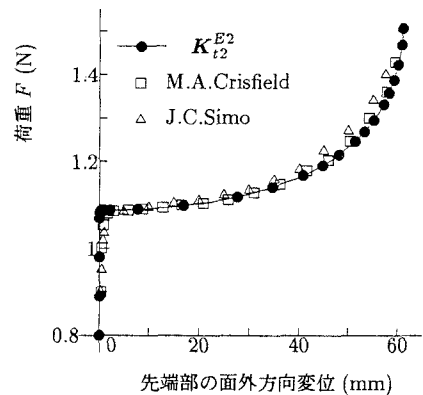


図-4 荷重と端部面外変位の関係

参考文献

- 1) 後藤文彦, 小林裕, 斎木功, 岩熊哲夫: 空間固定三軸回りの回転自由度を用いた空間梁解析, 応用力学論文集 Vol. 1, pp. 319-327, 1998.
- 2) Propan Vacharajittiphan and Nicholas S. Trahair: Flexural-torsional buckling of curved members, JOURNAL OF THE STRUCTURAL DIVISION, ST6, pp. 1223-1238, 1975.
- 3) Crisfield, M. A.: A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements, Compt. Meths. Appl. Mech. Engrg., 81, pp. 131-150, 1990.
- 4) Simo, J. C. and Vu-Quoc, L.: A three-dimensional finite-strain rod model. Part II, Compt. Meths. Appl. Mech. Engrg., 58, pp. 79-116, 1986.