I－1

トラス構造設計における強度の確率評価法

東北大学工学部　学生員　○菅野　友紀
東北大学工学部　学生員　浅井　光輝
東北大学工学部　正会員　池田　清宏

1. はじめに

トラス構造物の強度は，部材長や断面積などに含まれる誤差の影響により変動する．これら誤差を含む物理量をある確率分布に従う確率変量と仮定し，変動する強度の分布を確率論的に評価する方法として，一次近似二次モーメント法や確率有限要素法などが提案されている．しかし，トラス構造物の強度は分岐により支配されることが多く，分岐点においては強度が確率変数で微分不可能なため，確率変数での微分可能性を前提としたこれら従来の方法は，厳密な意味では適用不可能である．そこで本論文では，強度が確率変数で微分不可能な場合にも適用できる，初期不整感度則を用いた分岐理論に基づく確率評価法を紹介する．不安定単純対称分岐点に強度が支配されるトラス構造物の解析結果をもとに，部材長に含まれる誤差を多変数正規分布に従う確率変量と仮定したときに，少ない計算回数で強度の確率密度関数が求められることを示す．

2. 初期不整感度則

一般の構造物は，幾何形状の狂いや材料の寸法誤差など，設計の際に理想とする状態からの狂い量, すなわち初期不整を少なからず含んでいる．今回の研究では部材長が初期不整を含むと考え，実際の部材長 $\boldsymbol{L}$ に含まれる初期不整を，設計部材長 $\boldsymbol{L}^0$ を基準に次のように表す．

$$\varepsilon \boldsymbol{d} = \boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}^0 \quad \cdots\cdots (1)$$

ここに，$(\cdot)^0$ は初期不整のない完全系の値であることを意味し，ε は初期不整の大きさを表すスカラーであり，$\boldsymbol{d}$ は初期不整のパターンを表すベクトルである．

不安定対称分岐点を持つ構造物では，完全系では分岐点を境に，また初期不整のある不完全系では極大点を境に構造物が不安定化し，さらに完全系の強度 f_c^0 に対して不完全系の強度 f_c が低下する[1)]．このとき，構造物に式 (1) に示した初期不整が含まれた場合の強度低下量 $\tilde{f}_c$ は，分岐理論の基礎となる分岐方程式から式 (2) のように求められる．

$$\tilde{f}_c(\boldsymbol{d}) = -C_0\{a(\boldsymbol{d})\varepsilon\}^{2/3} \quad \cdots\cdots (2)$$

ここに，C_0 は初期不整に依存しない正定数であり，a は初期不整パターン $\boldsymbol{d}$ に依存して決まるスカラー変数である．式 (2) で表される強度低下量と初期不整の関係を初期不整感度則という．

3. 強度の確率密度関数

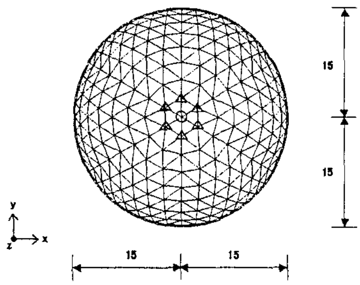
$\boldsymbol{d}$ が期待値ベクトル $\boldsymbol{0}$，分散・共分散行列 $\boldsymbol{W}$ を持つ多変数正規分布に従うと仮定すると，初期不整感度則の式 (2) より，強度 f_c の確率密度関数が式 (3) のように求められる[2)]．

$$\phi_{f_c}(f_c) = \frac{3|f_c - f_c^0|^{1/2}}{\sqrt{2\pi}(C_0\sigma^{2/3})^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{|f_c - f_c^0|}{C_0\sigma^{2/3}}\right)^3\right] (-\infty < f_c < f_c^0) \quad \cdots\cdots (3)$$

ここに，$\sigma = \tilde{\sigma}\varepsilon$ である．式 (3) より，強度は，完全系の強度 f_c^0 とある種の分散を表す変数 $C_0\sigma^{2/3}$ をパラメータに持つ確率分布を示すことがわかる．これらのパラメータを解析により求めることとなる．

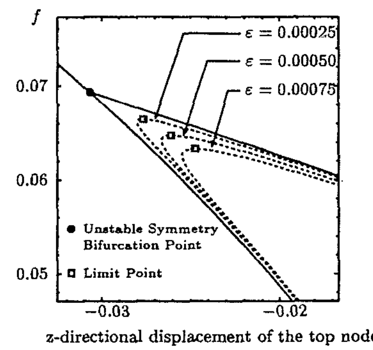
4. 解析例

図–1 に示す, 部材数 756 本，平均部材長 2.636 m のトラスドームに対して，頂点 (○) $-f$，2 段目 (△) $-2f$ の z 軸方向荷重を比例載荷した．断面剛性 EA は，全部材 1.814×10^2 (MN) とし，また部材長の誤差が期待値ベクトル $\boldsymbol{0}$，分散・共分散行列 $\boldsymbol{W} = 1.5 \times 10^{-8}\mathbf{I}$ を持つ多変数正規分布に従うと仮定した．ここに，$\mathbf{I}$ は単位行列であり，その次元は部材数に等しい．

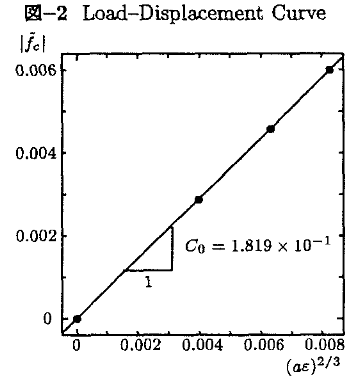


図–1 Analysis Model

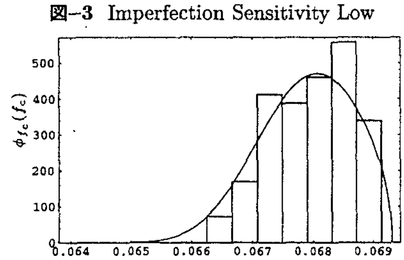
部材長に誤差が含まれない完全系の解析により，**図–2** 中の実線で示されるようなつり合い経路および ● で示される不安定対称分岐点が求められる．この分岐点での情報をもとに，パラメータ f_c^0 及び，分散・共分散行列 $\boldsymbol{W}$ の関数として与えられるパラメータ σ が確定する．次に，臨界初期不整パターン[3]を用いて初期不整の大きさ ε を変化させた解析によって，**図–2** 中の点線で示されるようなつり合い経路および，□ で示される極大点が求めらる．**図–3** には，このようにして求めた強度低下量 $\tilde{f}_c$ と与えられた初期不整から求まるスカラー変数 $a\varepsilon$ の 2/3 乗との関係を示す．この図から，強度低下量と初期不整が初期不整感度則により関係づけられることが確認できる．パラメータ C_0 はこの直線の傾きにより与えられ，f_c^0, σ をあわせて式 (3) に代入することで，**図–4** に示すような強度 f_c の確率密度関数が得られる．この図には，正規分布に従う 100 ケースのランダムな誤差に対して得られた強度のヒストグラムも示してある．今回求めた確率密度関数により強度の分布がうまく再現されている様子が分かる．



図–2 Load–Displacement Curve



図–3 Imperfection Sensitivity Low



図–4 Probability Density Function and Histogram

5. 結論

初期不整感度則を用いることにより，強度が分岐により支配されるトラス構造物の強度評価法を開発した．得られる強度の確率密度関数とモンテカルロシミュレーションの結果とを比較することにより，今回用いた評価法が，少ない計算回数で強度の分布を再現できることを示した．

参考文献

1) 池田清宏，岩熊哲夫，中沢正利，後藤聡，堀宗朗：初期不整感度則による分岐特性の漸近近似法, 構造工学論文集 Vol.39A pp.407–418 1993.
2) K. IKEDA and K. MUROTA : Systematic Description of Imperfect Bifurcation Behavior of Symmetric Systems，京都大学　数理解析研究所，RIMS-1140 1997.
3) K. Ikeda and K. Murota : Computation of Critical Initial Imperfecton of Truss Structures , Journal of Enginnering Mechanics , Vol. 116 , No.10 pp 2101–2117 October 1990.