

変位法によるP R C桁の構造解析

秋田大学 学生員 ○幸福 亨
秋田県庁 正会員 松塚 忠政
秋田大学 フェロー 川上 洵

1. まえがき

P R C 桁は設計荷重下において許容値を越えないようなひび割れを許す構造である。ひび割れ発生後の変位および断面力をテンションスティフニングを考慮した剛性マトリックス法により求め、応力分布を明らかにするものである。

2. 解析理論

2. 1 仮定および符号

- 1) 平面保持の仮定が成り立つ。
- 2) ひび割れが生じた断面において引張域のコンクリートは無視する。
- 3) 図-1のように軸力Nおよび応力は引張を正、曲げモーメントMは部材下縁に引張応力を生じるものを正とする。

2. 2 剛性マトリックス法

P R C 桁ではひび割れ発生前後で部材断面の剛性が変化するため、ひび割れない状態（状態1）とひび割れが発生した状態（状態2）を用いてテンションスティフニングを考慮して剛性マトリックス¹⁾を求める。図-1より基準点から任意の距離yの点におけるひずみは

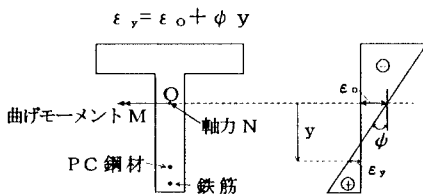


図-1 断面とひずみ分布

軸力N、曲げモーメントMが作用した時の基準軸Oに関する軸ひずみ ε_o と曲率 ϕ は式(1)で求められる。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_o \\ \phi \end{Bmatrix} = \frac{1}{E(AI - B^2)} \begin{bmatrix} I & -B \\ -B & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで、A、BおよびIはそれぞれ換算断面積、換算断面一次モーメント、換算断面二次モーメントである。

図-2のように部材i-jの一方を固定し他方を自由端とし、単位荷重 $F_k=1$ が作用するときの任意点における軸ひずみ、曲率を式(1)から求め、任意点の平均軸ひずみ $\varepsilon_{ok}(x)$ 、平均曲率 $\phi_k(x)$ を次式から求める。

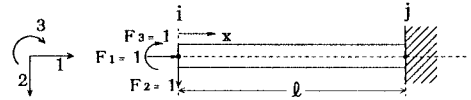


図-2 単位力が作用する片持ち梁

$$\varepsilon_{ok}(x) = (1-\zeta)\varepsilon_{ok1}(x) + \zeta\varepsilon_{ok2}(x)$$

$$\phi_k(x) = (1-\zeta)\phi_{k1}(x) + \zeta\phi_{k2}(x)$$

ただし、添字 $k=1, 2, 3$ は図-2の力Fの添字を示し、添字1, 2は状態1, 2を示す。

ここで、 ζ は0と1の間の値をとるひび割れの程度を表す無次元の係数で、 $\zeta=0$ はひび割れない状態、 $\zeta=1$ は、状態2に対応し $0 < \zeta < 1$ はひび割れが発生した状態を表し次式で求められる。

$$\zeta = 1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{f_{ct}}{\sigma_{1max}} \right)^2$$

ここで、

β_1 : 異形鉄筋の場合1、普通鉄筋の場合0.5

β_2 : 処女載荷の場合1、持続荷重あるいは繰返し荷重が作用する場合0.5

f_{ct} : コンクリートの引張強度

σ_{1max} : 状態1のNとMによる上縁あるいは下縁の最大引張応力

部材i-jのたわみ性マトリックスをマトリックス表示すると式(2)となり、その要素は部材長を ℓ とし式(3)により求められる。

$$[f] = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} \end{bmatrix} \dots (2)$$

$$\begin{Bmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \\ f_{3k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\int_0^\ell \varepsilon_{ok}(x) dx \\ -\int_0^\ell \phi_k(x) x dx \\ \int_0^\ell \phi_k(x) dx \end{Bmatrix} \dots (3)$$

式(2)で求められた部材i-jのたわみ性マトリックスの逆行列が部材i-jの剛性マトリックスとなる。

次にこの剛性マトリックスを釣り合いマトリックス[H]を用い両端の変位を拘束しない状態に展開すると、

$$[k] = [H]^T [f]^{-1} [H]$$

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

となる。よって、部材剛性方程式は、

$$\{F\} = [k]\{U\} + \{F_o\} \quad \dots (4)$$

ここで、 $\{F\}$: 節点力ベクトル

$\{U\}$: 変位ベクトル

$\{F_o\}$: 中間荷重等による荷重項

各部材剛性方程式から構造全体の剛性方程式を作成し、境界条件を考慮し未知変位について解くと、節点変位が得られこの変位を各部材の剛性方程式(4)に代入することにより節点の断面力が得られる。

2. 3 ひび割れが発生した構造物の解析

ひび割れが発生した構造に関する変位と断面力を以下の手順で計算する。

- 1) 各部材に対し全断面有効とし部材剛性方程式を求める。
- 2) 1) で求めた剛性方程式を各部材に適用し、全体剛性マトリックスを作成した後、未知節点変位を計算する。
- 3) 2) で求めた変位より各部材の断面力を計算する。
- 4) 2) で求めた変位を各部材で一方固定他方自由端の変位に変換する。

$$\{DC\} = [H]\{U\}$$

$\{U\}$: 全断面有効での変位ベクトル

- 5) 3) より部材のひび割れの判定をする。
- 6) 各部材のひび割れの有無を考慮した、たわみ性マトリックス及び剛性マトリックスの作成をする。
- 7) 各部材で平均軸ひずみ、平均曲率を用いて一方固定他方自由端の変位を以下のように計算をする。

$$\varepsilon_{om} = (1 - \zeta) \varepsilon_{o1} + \zeta \varepsilon_{o2}$$

$$\phi_m = (1 - \zeta) \phi_1 + \zeta \phi_2$$

ここで添字 1, 2 は状態 1, 2 を示す。

$$\{DB\} = \begin{Bmatrix} u_i = - \int_0^l \varepsilon_{om}(x) dx \\ v_i = - \int_0^l \phi_m(x) x dx \\ \theta_i = \int_0^l \phi_m(x) dx \end{Bmatrix}$$

- 8) 変位差分の計算をする。

$$\{\Delta D\} = \{DB\} - \{DC\}$$

- 9) 各部材ごとに変位差分による節点力の計算をする。

$$\{\Delta F\} = -[H]^T [f]^{-1} \{\Delta D\}$$

- 10) 各部材ごとに 9) で求めた節点力を荷重項として要素剛性方程式を求める。

$$\{O\} = [k]\{\Delta U\} + \{\Delta F\}$$

- 11) 10) で求めた剛性方程式を各節点ごとに重ね合わせ未知変位について計算をする。

- 12) 各部材ごとに断面力の計算をする。

$$\{\Delta X\} = [k]\{\Delta U\} + \{\Delta F\}$$

以上 1) から 12) までの 1 サイクルの繰り返し計算を行う。2 回目からは新しい断面力を用い 5) から始める。8) または 9) で $\{\Delta D\}$ または $\{\Delta F\}$ がほぼ 0 に収束するまで計算を行う。

3. 数値計算例

P R C 片持ち梁に活荷重が作用し、ひび割れが発生するとき、自由端のたわみおよびたわみ角を計算する。図-3 に断面形状、図-4 (a) に構造形状を示す。異形鉄筋を使用し、コンクリートの引張強度を $f_{ct} = 2.5 \text{ MPa}$ 、コンクリートの弾性係数は $E_c = 30 \text{ GPa}$ 、P C 鋼材と鉄筋の弾性係数は $E_s = 200 \text{ GPa}$ とする。

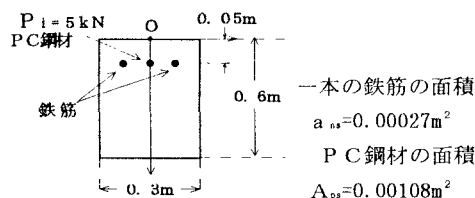


図-3 断面形状

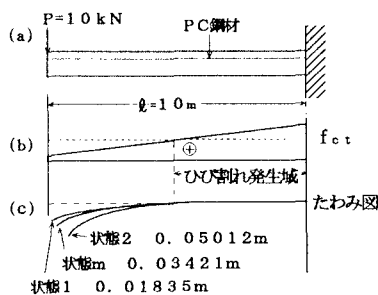


図-4 (a) 構造形状 (b) 最大引張応力図 (c) たわみ図

P R C 部材のひび割れ時の自由端のたわみは 0.03421 m、たわみ角は -0.004635 rad となる。

<参考文献>

- 1) Ghali, A., & Elbadry, M. M., "Serviceability Design of Continuous Prestressed Concrete Structures", PCI JOURNAL, V. 34, No. 1, January-February 1989, pp. 54-91.