Ⅲ－24

円孔を有する等方性弾性地盤の土かぶりによる応力、変位の解析

福島高専　正員　○堤　　　隆
山梨大学　正員　　平島　健一

1. はじめに

著者らは先に直交異方性弾性体の楕円形リング問題について、楕円板と楕円孔を有する無限板の解を用いて、それぞれの境界条件に収束するまで重ね合わせる解析手法を提示し、数値計算結果も十分に妥当であることを確認した[1]。これを踏まえ、本研究では円孔を有する無限板と半無限板の解を用いて, 円孔境界上では土かぶりが作用し直線境界上では応力が作用しない円孔を有する等方性半無限板の問題について、応力および変位の解析方法を提示する。

2. 解析方法

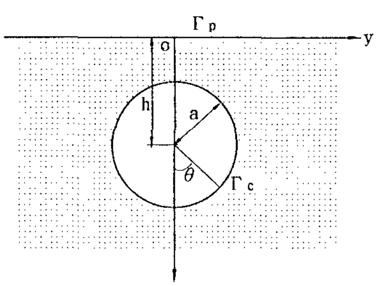

図1 円孔を有する半無限板

本研究で対象とする問題は、図1に示すような地表面から中心までの距離h、半径aの円孔を有し、その周縁に作用する土かぶりにより変位が生じている2次元的な等方性弾性半無限板である。

円孔周縁に作用する土かぶりは次式で表される。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= -(h + a\cos\theta)\gamma,\\ \sigma_y &= -(h + a\cos\theta)\gamma\hat{K}_0.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ここにγは土の単位体積重量、$\hat{K}_0$は静止土圧係数である。境界条件を次式のような法線方向の応力σ_rと接線方向のせん断応力$\tau_{r\theta}$の形で与える。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{r,0} - i\tau_{r\theta,0} &= \bar{c}_{0,0}\\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty}(\bar{c}_{0,m}\cos m\theta + \bar{d}_{0,m}\sin m\theta).\end{aligned}\right\}\cdots (2)$$

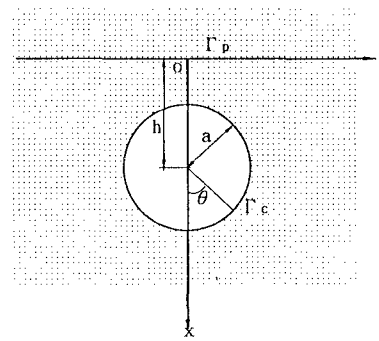

図2 円孔を有する無限板

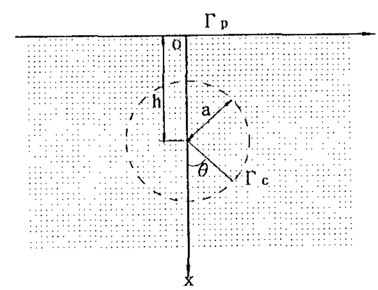

図3 半無限板

ここに上付きのバーは複素共役を表す。円孔周縁に土かぶりが作用する場合、式右辺の係数は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}&c_{0,0} = \tfrac{\gamma h}{2}(a + \hat{K}_0),\\ &c_{0,1} = \tfrac{\gamma a}{4}(1 + 3\hat{K}_0), && d_{0,1} = \tfrac{i\gamma a}{4}(1 - \hat{K}_0),\\ &c_{0,2} = -\tfrac{\gamma h}{2}(1 - \hat{K}_0), && d_{0,2} = \tfrac{i\gamma h}{2}(1 - \hat{K}_0),\\ &c_{0,3} = -\tfrac{\gamma a}{4}(1 - \hat{K}_0), && d_{0,3} = \tfrac{i\gamma a}{4}(1 - \hat{K}_0),\\ &c_{0,m} = d_{0,m} = 0, && (m \geq 4).\end{aligned}\right\}\quad (3)$$

この場合の応力関数は次のものを用いる[2]。

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{c,0}(z) &= M_0 \log z + \sum_{m=1}^{\infty} A_{0,-m} z^{-m},\\ \psi_{c,0}(z) &= N_0 z \log z + K_0 \log z\\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} B_{0,-m} z^{-m}.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots (4)$$

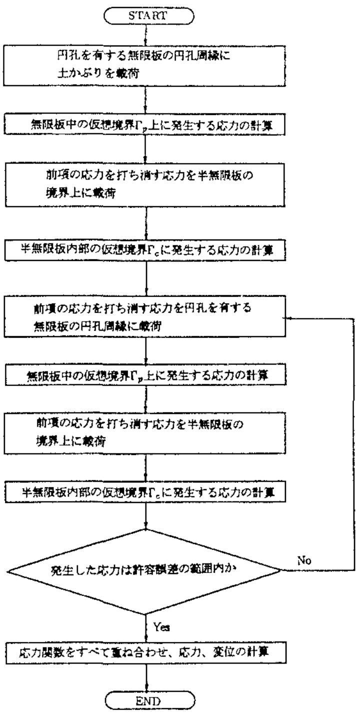

図4 重ね合わせによる解析手順

$$z = x + iy. \qquad \cdots\cdots (5)$$

問題の性質から平面ひずみ状態で定式化すればよいので、式中の複素定数は境界条件より次のように定義される。

$$\left.\begin{aligned}
&M_n = \tfrac{a(3-4\nu)}{8(1-\nu)}(c_{n,1} + id_{n,1}), \qquad N_n = \tfrac{\bar{M}_n}{3-4\nu},\\
&K_n = c_{n,0}a^2,\\
&A_{n,-m} = \tfrac{a^{m+1}}{2m}(c_{n,m+1} + id_{n,m+1}), \quad (m \geq 1),\\
&B_{n,-1} = -\tfrac{a^3}{2}\{-\tfrac{M_n}{a} + \tfrac{\bar{c}_1 + i\bar{d}_1}{2}\},\\
&B_{n,-m} = \tfrac{a^{m+2}}{2m}\{c_{n,m} + id_{n,m}\\
&\qquad -\tfrac{\bar{c}_{n,m} + i\bar{d}_{n,m}}{m+1}\}, \qquad (m \geq 2),\\
&\qquad\qquad (0 \leq n \leq N).
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

ここに添字nは後に述べる計算の繰り返し回数を示し、後の計算においても式(6)は用いられる。この半無限板内の仮想地表面Γ_p上に発生する垂直応力$\sigma^*_{x,1}$とせん断応力$\tau^*_{xy,1}$を打ち消す応力を半無限板表面に作用させる。このときの応力関数は次式を用いる。

$$\left.\begin{aligned}
\varphi'_{p,1}(z) &= \int_0^\infty e^{-zt}\frac{a_1(t) + ib_1(t)}{2}dt,\\
\psi''_{p,1}(z) &= \int_0^\infty e^{-zt}\{-\frac{\overline{a_1(t)} + \overline{ib_1(t)}}{2}\\
&\quad + \tfrac{a_1(t)+ib_1(t)}{2} - zt\tfrac{a_1(t)+ib_1(t)}{2}\}dt.
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned}
a_1(t) &= -\tfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\sigma^*_{x,1} + i\tau^*_{xy,1}]\cos tydy,\\
b_1(t) &= -\tfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\sigma^*_{x,1} + i\tau^*_{xy,1}]\sin tydy.
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (8)$$

ここに$'$はzについての微分を表す。なお、この問題では仮想地表面境界Γ_pに発生する$\sigma^*_{x,n}$は偶関数、$\tau^*_{xy,n}$は奇関数となるので、式(8)は次のような形になる。

$$\left.\begin{aligned}
a_n(t) &= -\tfrac{2}{\pi}\int_0^\infty \sigma^*_{x,n}\cos tydy,\\
b_n(t) &= -\tfrac{2i}{\pi}\int_0^\infty \tau^*_{xy,n}\sin tydy.\\
&\qquad\qquad (1 \leq n \leq N)
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (9)$$

この載荷により半無限板内の仮想円孔境界Γ_c上に生じる応力を打ち消すために再び円孔を有する無限板に載荷を行う。以下同様にΓ_cとΓ_pにおいて発生する応力が十分小さくなるまでこの操作をN回繰り返す。その結果、土かぶりによる円孔を有する等方性弾性半無限板問題の応力関数は最終的に、次式で与えられることになる。

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(z) &= \sum_{n=0}^{N}\varphi_{c,n}(z) + \sum_{n=1}^{N}\varphi_{p,n}(z),\\
\psi(z) &= \sum_{n=0}^{N}\psi_{c,n}(z) + \sum_{n=1}^{N}\psi_{p,n}(z).
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

なお、応力成分σ_x、σ_y、τ_{xy}、および変位成分u_x、u_yは次式により表される。

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= 2Re[\varphi'(z)] - Re[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)],\\
\sigma_y &= 2Re[\varphi'(z)] + Re[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)],\\
\tau_{xy} &= \qquad\qquad\quad Im[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)].
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (11)$$

$$u_x - iu_y = \frac{1}{2G}[\frac{3-\nu}{1+\nu}\overline{\varphi(z)} - \{\bar{z}\varphi'(z) + \psi'(z)\}]. \cdots (12)$$

ここにνはポアソン比、Gはせん断弾性係数を表す。

3. おわりに

本研究では円孔を有する等方性弾性半無限板に土かぶりが作用する問題の解析解を誘導した。ここでは紙面の関係上解析解の概要提示にとどまったが、数値計算例については講演会当日に発表する。

文 献

(1) 堤,平島:機論,**63**-615,A(1997),2411-2416.

(2) 森口,2次元弾性論,(1957),**41**,岩波書店.

(3) Hetenyi,M.:*Jour.Appl.Mech.***27**,(1960),289-296.