Ⅲ－22

地盤材料の構成モデルの制約条件と安定性の条件

東北学院大学工学部(正)　飛田　善雄

1.まえがき

地盤材料は、微視的レベルでの複雑な変形・破壊メカニズムを反映して、極めて複雑な巨視的変形・破壊特性を示す。高度な且つ精密な実験結果が示す特性を構成式として定式化しようとすると、導入すべき変数の数が多く成るのはもちろんのこと、質的にも変化し、古典的弾塑性体の有する数学的な有利さを消失することになる。

このような複雑な特性を示す材料の定式化を試みる場合には、どうしても何らかのガイドラインが必要になる。すなわち、非線形構成式に対する制約条件とその数学的構造をしっかりと押さえておくことが必要になる。制約条件の候補として挙げられるのは、次の２つの条件であろう：（１）客観性の条件；（２）Clausius- Duhemの不等式；数学的特性に関しては、（３）安定性の条件、が大事になる.

本文では、この３つの条件を簡潔にまとめ、これらの条件の意味するところを具体的な例で議論する。特に、数値解析への応用を試みる場合には、安定性の条件に対する検討が重要であることを示す。

（１）の議論を除いては、微小変形理論に限定する。さらに、議論の対象とする構成式は速度形式の弾塑性モデルに限定する。紙面の都合で、表面的な議論に終始することをお詫びしておく.

本文中で使用する記号と演算の約束は次のとおりである：σ:応力テンソル、ε:微小ひずみテンソル、D:変形速度テンソル、α:内部変数、**A**:αに共役な熱力学的力、u:内部エネルギー密度、ψ:Helmholzの自由エネルギー密度、S:エントロピー、θ:絶対温度。

2.非線形構成式の制約条件

非線形構成式の制約条件について、速度形式の弾塑性モデルを主な対象としてまとめる。以下、できるかぎり簡潔な説明を試みるが、十分にその背景や基礎を論じることはできない。比較的読みやすい文献を中心に、参考文献として取り上げる。

2.1客観性の原理（基準枠無差別性の原理）

客観性の原理あるいは基準枠無差別性の原理は連続体力学の標準的な教科書（例えば、　北川(1987)など）に記述されている。次の二つのことから成り立つ：

（１）速度型構成式を定式化する上で、用いることのできる変数は客観性をもたなければならない；

（２）(1)を満足する変数により、構成式を記述するとき、物体の何らかの物理的挙動を表現する関数は、それを観測する基準枠によらず、つぎのように変換されること：

$$\mathbf{T}=\mathbf{F}(\mathbf{D}, \alpha, \ldots) \quad \cdots\cdots(1)$$

に対して、

$$\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^{T}=\mathbf{F}(\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{T}, \mathbf{Q}\alpha\mathbf{Q}^{T}, \ldots) \quad \cdots\cdots(2)$$

このような関係が任意の直交テンソル（$\mathbf{QQ}^{T}=\mathbf{I}$）に対して成立する関数を数学の分野では等方関数と呼んでいる（材料の示す等方性や異方性とは関係ない。合理的に異方的な関係を表現する際にも、等方関数が必要になる）。

(2) 式が選択した変数に対して、どのように表現されるかは、現実的な構成式（そこで、用いられる変数の数と種類は限定される）を定式化する目的であれば、十分に検討されており、表示定理と呼ばれている。構成式の独立変数として、２つ以上の変数を採用するときには、その基本的な形がどのようになるのかについての見通しが立たないと困る場合がある。また、想定した変数が、ある挙動の表現に十分なものであるか、についての定性的な議論を行なう際にも、等方関数の表示定理は有効である。構成式の定式化に等方関数の表示定理を用いて、材料の異方的な変形・破壊挙動に利用しようとする試みは、金属材料（例えば、Boehler(1987))や砂のような粒状体（Tobita(1989)）でも用いられている。客観性の原理を認めたとき、どのような数学的制約条件が発生し、それをどのように利用するかは十分に議論され、ほぼ完全な域に達していると思われる。

例題として、すべり面を一つだけ含むような構成モデルを考えてみる．そのようなモデルは、砂の様な粒状体の変形挙動を表現する目的でかなり詳細に検討されてきた．一つだけのすべり面（モビライズド面と呼ばれている）を考え、その面に沿って、ダイレイタンシーを含む単純せん断変形が生じているとして、全体の挙動を表現するモデルである．一つのすべり面を考えて、さらに、これが塑性ひずみ速度と応力の共軸性を満足するものとすれば、という（等方体の）弾塑性モデルの基本的な仮定を取り入れて、構成モデルが提案されている．座標変換を行えば容易にわかることであるが、このすべりモデルは共軸性は示さない（主応力状態で、必ず面に接するせん断ひずみ成分が発生する）．つまり、二つの仮定は相矛盾するものとなっている．この矛盾を明確に示すのが、表示定理である．すなわち、応力とすべり面の法線方向ベクトルを独立変数としたとき、塑性ひずみ速度は、主応力状態で、応力だけの関数とはなりえないことを示すことにより、二つの仮定の矛盾を示すことができる.

すべり面を表現するベクトルを導入するということは、何らかの異方性を取り入れることになっていることに気づけばこのような誤りを防ぐことができる．ちなみに、すべり面を入れて共軸な構成式をつくるには、２次元では２個、３次元では８個のすべり面を設定することが必要である．

2.2 Clausius-Duhemの不等式

塑性挙動などの不可逆的過程を取り扱う熱力学の分野には、支配的な理論が存在しないというのが定説の様である（Maugin, 1992)。この様な現状は、古典的熱力学が、可逆的過程のみを対象として発展し、熱力学を構成する主たる関係（状態関数など）が可逆過程にのみ、厳密には有効であるという事実が主な原因と考えられる。本説では、構成式の定式化に最も便利な内部変数を利用する熱力学に従って、Clausius-Duhemの不等式と、純粋な力学的過程では、内部散逸が正という等価な条件を導く。

構成式の制約条件を与えるClausius-Duhemの不等式は以下に述べる３つの基本法則：(1)仮想仕事の原理（平衡条件式）通常仮想変位は変位境界条件を満足する任意の変位に対して導かれるものであるが、ここでは実際の速度を採用することにより導かれる；(2)エネルギー保存則（熱力学の第１法則）；(3)エントロピー増大の法則（熱力学第２法則）．

導入の詳細はMaugin (1992)に譲り、構成式の議論に便利な次の形式のClausius-Duhemの不等式を考える．

$$-(W + S\theta) + \sigma : \mathbf{D} + \theta \mathbf{q} \ \nabla(1/\theta) \geq 0 \quad \cdots\cdots(3)$$

$$\begin{aligned} \phi_q &\equiv -S\dot{\theta} + \theta q \cdot \nabla(1/\theta) \\ \phi_{int\ r} &\equiv -\dot{W} + \sigma : \mathbf{D} \end{aligned} \quad \cdots\cdots(4)$$

(3)式を(4)式の様に、熱的散逸と内部散逸にわける。熱的過程を無視する場合には、Clausius-Duhemの不等式は内部散逸正の条件となる。(3)式におけるHelmholtzの自由エネルギー関数を材料に応じて適切に選定することにより、具体的な議論ができる。注意すべきことは、自由エネルギーの定義に、塑性を表現する内部変数を取り入れることにより、自由エネルギーの変化も内部散逸をもたらしうるということである。具体的な構成式の定式化に当たって、純粋力学過程を対象とする場合には、(4)-2式の内部散逸正の条件はほぼ（自動的に）満足されているものと考えてよい．これを破る様なモデルを構築することはよほど荒唐無稽なモデルを考え出さない限り、ありえない．

唯一問題となりうるのは、応力原点を降伏曲面内に含まない「移動硬化モデル」の場合である（応力原点を含む場合には、降伏関数が凸関数である限り、その数学的な特徴より、内部散逸正の条件は自動的に満足される）．含まない場合には、塑性ひずみに対する熱力学的に共役な力が何であるかを正確に議論しないと、散逸が負という結論を導く可能性がある．結論のみを記すと、熱力学的に共役な応力は、現在の（力の釣り合い条件を満足する）応力から、背応力を差し引いた修正応力になっている．つまり、背応力を応力原点の様に考えると、降伏関数が凸関数である限り、内部散逸正の条件は（自動的に）満足されていることになる．(4)式以降の下線部の議論を正確に行うことが、この場合には必要になる．

上記二つの制約条件は、ひずみ硬化あるいは軟化にかかわらずに成立しなければならない．しかし、次に述べる安定性の条件は、この二つの条件とはかなり性格を異にする条件である．すなわち、構成式として安定性の条件を満足する必要があるのかどうかは、まだ結論が出ていないし、むしろ安定性の条件を破るようなモデルが今後の流動・破壊挙動を理解する上では必要な状況である．

3．安定性の条件

安定性の条件がどこから出てくるのか、に関しては土質工学の分野ではあまり議論されていない．DruckerやHillの安定性の条件が、応力増分と（塑性もしくは全）ひずみ増分の内積が正であれば、安定材料とされている．

この条件は、我々が解析の対象としている現象を表現する支配方程式が、唯一解をもち、それが（小さな）摂動に関して、大きくは変動しない安定な解であるかどうか、という数学的な”解の安定性”から導かれるものである．この導入過程で、対象とする現象が何らかのポテンシャル関数を持つ場合には、エネルギー的議論が可能となり、そのような系に対して上記条件は意味を持つのである（詳しい議論は飛田(1996)を参照のこと）．

地盤材料は拘束圧依存性をもつ摩擦性材料であり、その力学的挙動は、もう一つの重要な特性：ダイレイタンシーのために、特に間隙水圧さらに水の流れとの強い干渉を示す．この様な材料は構成関係としてポテンシャル関数を持たないために非保存系となり、上記安定性の議論の当初から、考慮の範囲外とされている．しかしながら、この安定性の条件こそが、具体的な数値解析を行う上では、最も重要な条件である．複雑な構成モデルを用いて数値解析を行い、初期地震動の数波で解が発散しないためには、構成式の安定性の検討が重要になる．また、せん断帯等の分岐現象を解析する上では、幾何学的非線形性の導入や降伏面のとんがり効果など、何らかの形で、安定性の条件が破れるような要因を取り入れておかないと初期の目的を達成できないことも注意するべきである．

参考文献：

Boehler(1987): Application of tensoru function in Solid Mechanics,Speinger Verla.;北川(1987)弾塑性力学、掌華房；Maugin (1992) : The thermomechanics of Plasticity and Fracture,Cambridge Press ; Tobita(1989):S& F, 29-4, pp. 91-104; 飛田(1996)構造工学論文集、Vol.42A,