

Ⅲ－21

微視力学を考慮した粒状体構成則の定式化

東北大学 学生員 ()金子賢治

東北大学 正 員 岸野佑次

東北大学 正 員 京谷孝史

1.はじめに

非弾性非均質材料の連続体力学モデルを誘導するに当たっては、材料内部の微視的なエネルギー散逸機構を反映させることが重要であると考えられる。本論文では、散逸関数に着目した構成則理論¹⁾の応用として、簡単な2次元4粒子モデルのシミュレーションに基づいて定めた散逸関数を基に粒状体の構成則を定式化し、その考察を行う。

2.散逸関数に基づく構成則理論

まず、散逸関数に基づく構成則理論について簡単に説明するが、拘束関数と流動則の誘導に関する部分については、本論文では用いないため省略する。

(1)ひずみ速度の分解

まず、ひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ を弾性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^e$ と散逸ひずみ速度 $\dot{d}$ とに分解する。

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{d} \quad (1)$$

さらに、散逸ひずみ速度については、その方向と大きさをを用いて次式のように書けるものとする。

$$\dot{d} = n \dot{\alpha} \quad (2)$$

ここに、 n は散逸ひずみ速度 $\dot{d}$ の方向を表し、

$$n : n = 1 \quad (3)$$

を満足する単位のテンソルである。また、 $\dot{\alpha}$ は散逸ひずみ速度 $\dot{d}$ の大きさを表す量で、 α の時間積分 α は散逸変形の進行を表すパラメータとして用いられる。

(2)散逸条件

材料の変形に伴って内部応力のする仕事のうち、散逸変形に対応する部分を散逸仕事と称する。散逸仕事速度は次式のように与えられる。

$$\sigma : \dot{d} = \omega \dot{\alpha} \quad (4)$$

$$\omega \equiv \sigma : n \quad (5)$$

ここに、 ω は単位の散逸ひずみあたりの散逸仕事を表す。 ω は n の値によっては負になりうるが散逸変形の不可逆性により実際の n に対しては正となる。材料内部に加わる応力のする仕事のうち、非弾性部分に関しては、材料内部でエネルギーが散逸される。散逸関数を、単位の散逸ひずみを生じさせるのに必要な単位体積あたりのエネルギー、と

して次式のように表す。

$$\varphi = \varphi(\sigma, \epsilon) \geq 0 \quad (\text{for } n : n = 1) \quad (6)$$

散逸関数は、本論文においては、応力とひずみの関数とする。材料内部でエネルギー散逸が生じるには、付帯条件式(3)のもとで、散逸仕事速度と散逸関数が共通点を持つ必要がある。すなわち、次式のエネルギーに関する平衡条件を意味する。

$$f \equiv \varphi - \omega = 0 \quad (\text{for } n : n = 1) \quad (7)$$

この様子を散逸ひずみ速度空間に表すと、図-1のようになる。図-1の場合は、 $n : n = 1$ となる全ての n に対して $f > 0$ であり散逸条件を満たしていない。この後、載荷が進み、はじめて散逸が起こる際には $f = 0$ となり、 ω と φ は $n : n = 1$ 上で接することになる。また、実際に実現する n 以外の方向においては $f > 0$ となるので、 ω と φ が接する条件は f が極小値をとる条件として満たされる。

(3)硬化則

散逸が連続して生じるためには、塑性論における適応の条件と同様に、散逸条件を満たし続ける必要がある。すなわち式(7)の時間微分をとることにより、次式が成立する。

$$\dot{f} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon} : \dot{\epsilon} - n : \dot{\sigma} = 0 \quad (8)$$

散逸ひずみ速度が、次式のように弾性部分と散逸部分に分けられるとする。

$$\dot{\epsilon} = F^e \dot{\sigma} + n \dot{\alpha} \quad (9)$$

式(9)を用いて、式(8)を解けば、以下の硬化則を得る。

$$\dot{\alpha} = \frac{m : \dot{\sigma}}{D} \quad (10)$$

$$m \equiv n - \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} - \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon} F^e \quad (11)$$

$$D \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon} : n \quad (12)$$

以上より、構成則は非関連流動則型となる。

$$\dot{d} = n \dot{\alpha} = \frac{n m : \dot{\sigma}}{D} \quad (13)$$

3.2次元4粒子モデルへの適用

本論文では、前章で述べた構成則理論に、微視力学に基づいた具体的な散逸関数を導入する。ここでは、図-2に示される簡単な2次元4粒子モデルの微視力学より散逸関数を定め、構成則を定式化し考察する。

微視力学の解析は粒状要素法²⁾に基づいて行うこととする。粒子間には、接線方向および法線方向に線形バネを仮定し、粒子間のすべりの条件としてクーロンの摩擦則を仮定する。ここでは、 $d\epsilon_1 = 5.8 \times 10^{-5}$ 、 $d\epsilon_2 = -5.0 \times 10^{-5}$ とした完全ひずみ制御により、4粒子モデルの2軸圧縮試験シミュレーションを行い、図-3に解析結果として応力ひずみ曲線を示す。粒子配置、載荷方向がともに対称であるので、本解析においては粒子の回転はない。

最初の剛性が変化する点は、接触点(B)以外の4つの接触点ですべりが生じ始める点である。内部摩擦角を大きくすると、すべり発生時の応力比も大きくなることからわかる。応力ひずみ曲線が次に折れ曲がる点では、接触点(B)の接触

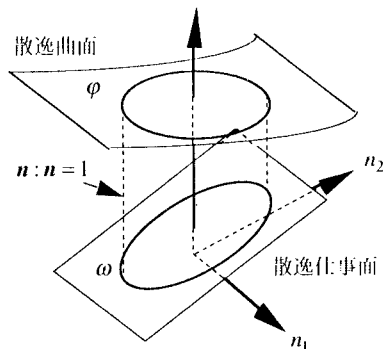


図-1 散逸関数の概念

状態が失われ、粒子構造が不安定になる。以下、構成則の定式化は、構造が不安定になる前までを対象とする。

以上の4粒子モデルの解析結果に基づいて、構成則の定式化を行う。モデルの対称性より、接触点BD以外の4つの接触点の挙動は等しくなるので、接触点ABとBDに着目することとする。まず、散逸ひずみ速度の方向を表す単位のテンソル $\mathbf{n}$ は、接触点ABにおけるすべり量 dL と散逸ひずみ速度との関係より、次式のように書ける。

$$n_1 = \frac{2r_B^{02}(1-\varepsilon_2)}{\sqrt{r_A^{02}(1-\varepsilon_1)^2 + 4r_B^{02}(1-\varepsilon_2)^2}} \quad (14)$$

$$n_2 = -\frac{r_A^{02}(1-\varepsilon_1)}{\sqrt{r_A^{02}(1-\varepsilon_1)^2 + 4r_B^{02}(1-\varepsilon_2)^2}} \quad (15)$$

ここに、 r_A^0, r_B^0 は、初期状態における原点Oから粒子A,Bの中心までの距離を表している。

散逸ひずみ速度の方向が求まったので、以下、散逸関数を決定するが、本理論における散逸関数の役割は、散逸条件を定めることと、硬化特性を表現することである。4粒子モデルにおける散逸エネルギー増分 dE^d を、接触点ABにおける摩擦エネルギー増分 dE_f のみではなく、各接触点における非回復バネエネルギー増分 dE_{sp}^d との和で表されるとした。

$$dE^d = dE_{sp}^d + dE_f \quad (16)$$

また、弾性エネルギー増分は、回復するバネエネルギー増分に相当することになる。非回復バネエネルギーは、実際にエネルギーが消散するわけではないが、除荷したときに回復しないという意味で、散逸エネルギーの一部であるといえるであろう。非回復バネエネルギーは、弾完全塑性体の3本吊りトラスにおける残留内力による内部エネルギーと類似したエネルギーであると考えられる。この2つのエネルギーはともに、構造変化と要素同士の拘束によって生じる。式(22)を具体的に計算し、単位面積、単位散逸ひずみ速度で正規化したものを散逸関数とすれば次式のようになる。

$$\varphi = \frac{\{(1-\varepsilon_1)\sigma_1 + (1-\varepsilon_2)(\sigma_2 - C_1\varepsilon_2 - C_2)\}}{C_9(1-2\varepsilon_1) + C_{10}(1-2\varepsilon_2)} \times \{[C_3(1-\varepsilon_1) + C_4(1-\varepsilon_2)]C_5 + [C_6(1-\varepsilon_1) - C_7(1-\varepsilon_2)]C_8\} + (C_1\varepsilon_2 + C_2)n_2 \quad (17)$$

ここに、 $C_1 \sim C_{10}$ は、内部摩擦角、初期粒子配置等から決まる定数である。上式を式(11),(12)に代入することにより、 $\mathbf{m}$ 、 $\mathbf{D}$ が求まり、構成則が決定する。

図-4は、4粒子モデルの微視力学より散逸関数を決定し、前章の構成則理論により定式化した構成則を計算した結果である。これより、最初に散逸の生じる応力レベルは、4粒子モデルにおいてすべり発生時の応力レベルと一致し、その内部摩擦角による違いも明確に表れている。また、散逸の生じた後の硬化の様子が4粒子モデル解析結果と一致した結果を得た。

4.おわりに

本文では、散逸関数を用いた構成則理論を基に、2次元4粒子モデルの微視力学を構成則に反映させることができた。3次元6粒子モデルの3軸試験解析についても同様の結果を得ており、当日発表したい。今後、同様の理論を用いて、さらに複雑な粒状体モデルや載荷経路に関して、微視力学を考慮した構成則の定式化を行いたいと考えている。

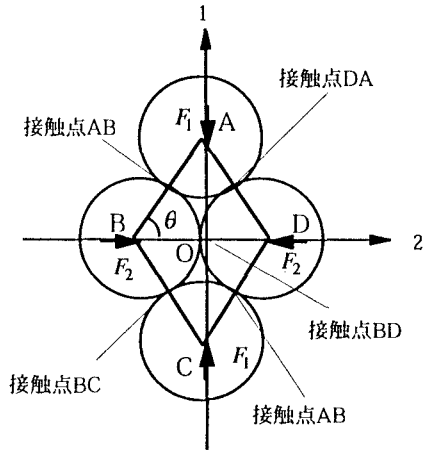


図-2 4粒子モデル配置図

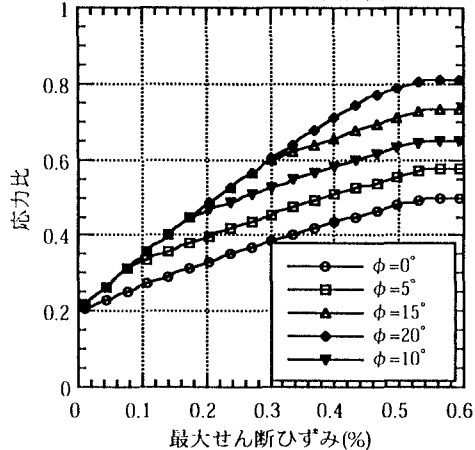


図-3 4粒子モデル解析結果

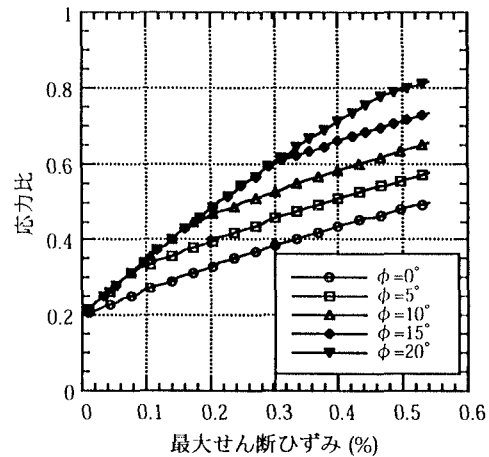


図-4 構成則による計算結果

参考文献

- 1) 岸野佑次：摩擦性材料の構成則の定式化，土木学会論文集，No.511/III-30, 1995.3
- 2) 岸野佑次：新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析，土木学会論文集，No.406/III-11, pp.97-106, 1989