

Ⅲ-20

シミュレーションによる粒状体変形特性のモデル化に関する考察

東北大学 学生員 ○武 建 勲
東北大学 正 員 岸野 佑 次
東北大学 正 員 京 谷 孝 史

1. はじめに

粒状体の変形特性の合理的なモデル化を行うためには微視的なメカニズムを考慮する必要があるが、このためには計算機シミュレーションが有効であると考えられる。文献1) においては粒状要素法を用いて種々の変形段階におけるブロープ・除荷試験を行い、弾性ひずみおよび塑性ひずみを分離することにより弾塑性論の粒状体への適用性について予備的検討を行った。本文においては、各ブロープ試験点において弾性的および塑性的増分コンプライアンスの算定を行うことにより、大部分の試験点において弾塑性論の処理が可能であることを確認した。

2. 載荷経路とブロープ試験

粒状供試体モデルを図-1に示す。領域の形状はほぼ円形で、この領域に半径の分布が0.5 cm から1 cm の一様乱数になるように選んだ395個の円粒子がパッキングされている。集合体周辺部に配置された粒子（境界粒子と呼ぶ）は72個である。載荷の際、粒子形状は円形を保たせるが、粒子間の重なりにより粒子の弾性変形を簡易的に表す。接触力と重なり量の関係は線形とし、法線および接線方向のバネ定数を $c_n=1000$ kN/m、 $c_t=700$ kN/m とする。接触力の法線方向成分は常に圧縮 $p_n > 0$ とし、接線方向成分は摩擦則 $|p_t| \leq p_n \tan \phi$ （摩擦角： $\phi=25^\circ$ ）に支配されるものと仮定する。逐次解析の過程においてはこれらの制約条件が常に満たされるように補整を行う。

各境界粒子を次式で定める位置に移動させることにより粒状供試体モデルに巨視的ひずみを与えることとする。

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}_B - \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}_B \quad (1)$$

B：境界粒子

X_0, Y_0 ：境界粒子中心の変形前の座標

X, Y ：境界粒子中心の変形後の座標

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ ：モデルに与える平均ひずみ

粒状供試体モデルの平均応力は境界粒子に内部粒子から作用する接触力をもとに次式で計算される。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{1}{A_0} \sum_B \begin{bmatrix} p_x X_0 & p_x Y_0 \\ p_y X_0 & p_y Y_0 \end{bmatrix}_B \quad (2)$$

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ ：モデルに作用する応力

p_x, p_y ：境界粒子に作用する接触力の合力

A_0 ：境界粒子中心を結ぶ多角形に囲まれた面積

$\sum_B$ ：全ての境界粒子について和

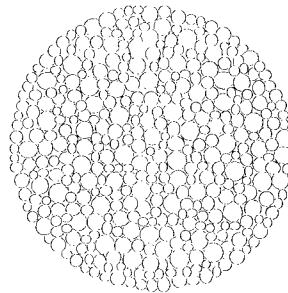


図-1 粒状供試体モデル

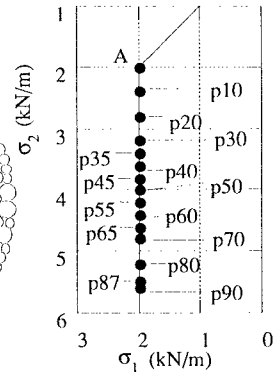


図-2 ブロープ試験点

図-2に主応力空間上の載荷経路を示す。せん断載荷試験はA点から σ_2 のみを変化させて行った。また、このせん断載荷経路上に一連の点を選んでブロープ試験を行った。せん断載荷経路に沿う応力ひずみ曲線を図-3に示す。

ブロープ試験は、一つの載荷試験点から出発して、図-4に示すように 45° 間隔8方向に絶対値の等しい応力増分 ($\Delta\sigma=0.04$ kN/m) を与えて各々載荷・除荷試験を行う。この載荷・除荷により各ブロープ試験方向の全ひずみ増分 $\Delta\varepsilon$ を弾性部分と塑性部分に分離できる。すなわち、除荷により残留する部分を塑性ひずみ増分 $\Delta\varepsilon^p$ とし、弾性ひずみ増分は全ひずみ増分と塑性ひずみ増分の差 $\Delta\varepsilon^e = \Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^p$ として計算される。

p20におけるブロープ試験から得た弾・塑性ひずみ増分の分布をそれぞれ図-5、6に黒の四角形で示す。弾性ひずみ増分の分布は主ひずみ空間座標原点を中心とする楕円で、その長軸方向は $\theta=-45^\circ$ 、短軸方向は $\theta=45^\circ$ であり、この場合の弾性応答は等方的である。異方性が生じると、主軸の方向は反時計回りに回転する。

3. 弾性コンプライアンス

弾性ひずみ増分について以下の関係が成立すると仮定する。

$$\begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_x^e \\ \Delta\varepsilon_y^e \\ \Delta\gamma_{xy}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{xx}^e & c_{xy}^e & c_{xz}^e \\ c_{yx}^e & c_{yy}^e & c_{yz}^e \\ c_{zx}^e & c_{zy}^e & c_{zz}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\text{または、} \quad \Delta\varepsilon^e = C^e : \Delta\sigma \quad (4)$$

ここに、 $\Delta\varepsilon^e$ は弾性ひずみ増分テンソル、 $\Delta\sigma$ は応力増分テンソル、 C^e は弾性コンプライアンスである。ある試験点において C^e はあらゆるブロープ試験方向に共通した定数である。

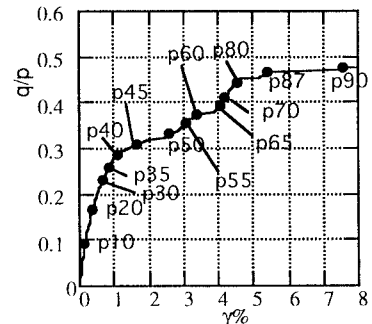


図-3 載荷曲線とブロープ試験点

弾性コンプライアンス行列の第1列は0, 4方向のプロープ試験, 第2列は2, 6方向のプロープ試験の平均により求めることができる。本文におけるプロープ試験の主軸は全て x, y 軸に一致させているので, 第3列は必要としない。 C^e に基づいてプロープ試験点 p20 における8方向の弾性ひずみ増分を計算した結果を図-5に白丸で示す。個々のプロープ試験値(黒の四角形)との比較より弾性ひずみ増分は C^e により十分な精度で予測できることがわかる。

4. 塑性コンプライアンス

塑性流動則は次式により表される。

$$\Delta \epsilon^p = C^p : \Delta \sigma = \left\langle \frac{1}{h} n : \Delta \sigma \right\rangle m \quad (5)$$

ここに, $\Delta \epsilon^p$ は塑性ひずみ増分テンソル, C^p は塑性コンプライアンス, h は硬化係数, n, m は降伏曲面の法線方向と塑性ひずみ増分方向を表す大きさ1のテンソル(関連流動則の場合 $n=m$)である。また, 上式右辺の $\langle x \rangle$ は $x \geq 0$ のとき $\langle x \rangle = x$, $x < 0$ のとき $\langle x \rangle = 0$ を意味する。 C^p は負荷方向の0, 1, 6, 7方向についてのみ意味があり, 次式で与えられる。

$$C^p = \frac{1}{h} mn \quad (6)$$

ここで, 上式の m, n を次式のように表す。

$$m = \begin{bmatrix} A + B \cos 2\alpha & -B \sin 2\alpha \\ -B \sin 2\alpha & A - B \cos 2\alpha \end{bmatrix} \quad n = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 \\ 0 & \sin \beta \end{bmatrix} \quad (7), (8)$$

$$A = \frac{\cos \theta_0 + \sin \theta_0}{2} \quad B = \frac{\cos \theta_0 - \sin \theta_0}{2} \quad (9), (10)$$

ここに, α は応力主軸とひずみ増分主軸のずれの角度, θ_0 と β はそれぞれ n と m の方向角である。 β は h とともに, プロープ試験結果が式(5)によって最も適切に表わされるように最小二乗法によって決定する。具体的には次式で与えられる。

$$\tan \beta = -(\sqrt{2}L_6 - L_1 + L_7)/(\sqrt{2}L_0 + L_1 + L_7) \quad (11)$$

$$h = \frac{\Delta a(\cos \beta + \cos(45^\circ - \beta) + \sin \beta + \cos(\beta + 45^\circ))}{L_0 + L_1 + L_6 + L_7} \quad (12)$$

プロープ試験点 p20 における4つの載荷方向(0, 1, 6, 7)について式(6)~(12)より求めた C^p を基に塑性ひずみ増分を算定した結果を図-6に白丸で示す。個々のプロープ試験値(黒の四角形)との比較より塑性ひずみ増分は C^p により十分な精度で予測できることがわかる。ただし, $n \neq m$ であり流動則は非関連となる。

図-2の諸プロープ試験点中, p10, 30, 35, 55, 65, 70, 87についてはp20と同様に非関連流動則による塑性ひずみの予測が可能である。また, p40, 60, 80, 90については, 絶対値 $\Delta \sigma = 0.04 \text{ kN/m}$ の応力増分のプロープ試験に対しては, 特定の方向に不安定な変形が生じて流動則が適用できないが, 応力増分の絶対値を $\Delta \sigma = 0.01, 0.005 \text{ kN/m}$ と小さ目に設定することにより流動則が成立することを確認した。また, p45, 50については小さな応力増分に対しても流動則が適用できない。この理由は, 図-3の載荷曲線において, p45, 50点前後で接線勾配の連続性が失われており, モデル内部の微視構造が部分的に変化したと考えられる。図-7に諸プロープ試験点における θ_0 および β の q/p に対するプロットを示す。同図には比較のために主応力空間における座標原点とプロープ試験点とを結ぶ直線に立てた垂直線方向角 θ を黒い四角で書き入れたが, β と p45 近辺を除きはほぼ一致している。

以上より, ひずみが急激に変化する以前においては, 粒状体構成則として非関連性や非共軸性を考慮した適切な弾塑性モデルを用いることにより巨視的的平均的な取り扱いが可能であると結論づけられよう。

参考文献

1) 改良粒状要素法による粒状体の弾塑性挙動の研究, 構造工学論文集 Vol.43A(1997)

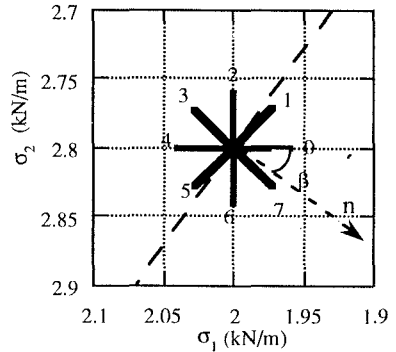


図-4 p20点のプロープ試験と降伏面

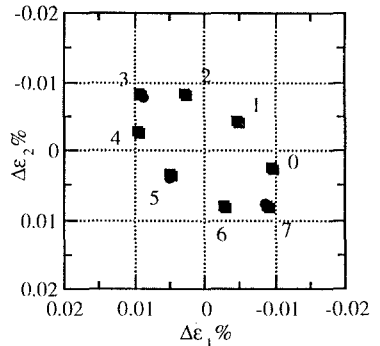


図-5 p20点の弾性ひずみ増分

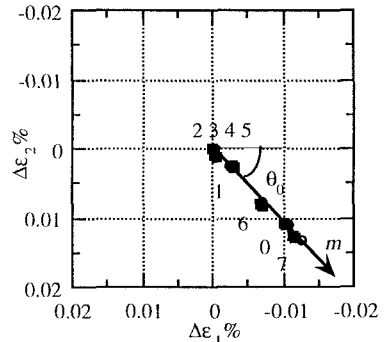


図-6 p20点の塑性ひずみ増分

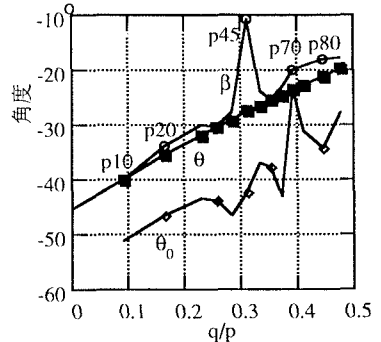


図-7 主軸のずれの変化