

球面浅瀬上の波動解析

東北大学大学院 学生員 ○成岡 正祥
東北大学大学院 正会員 真野 明

1. はじめに

波の屈折現象の中で最も興味深い現象は波の軌跡を示す波向き線が一点に集中し、焦点を作る火焦点、または波向き線が交差して包絡線をつくる火焦線の問題である。この火焦線では波向き線が交差することにより、波向き線間隔が無限小となり、波向き線を横切るエネルギー輸送の効果が無視し得なくなる。この結果、波高は無限大となる。海洋で波高無限大ということは砕波が起こることになるが、火焦線で砕波しない場合もある。この理論と現実のずれは海洋波動を幾何光学から導いたことに起因する。通常、こうした扱いで十分であるが、火焦点（火焦線）のような場合には問題となる。

そこで火焦点でも有限の値をとるエアリー関数を使ったLuwig¹⁾の解法を用い火焦線のできやすい地形である岸側から一様斜面に斜めに入射する波と球面浅瀬での波動を対象とし、数値計算値と水理模型実験値とを比較検証をおこなう。

2. 幾何光学近似との相違点

幾何光学による波動の近似解によると各波向き線は独立なものとし、波向き線間のエネルギーは保存され波向き線を横切るエネルギーはないと仮定している。したがって次式が成り立つ。

$$H_s = H_{s0} \frac{(l_{s0} k_s)^{1/2}}{(l_s k_{s0})^{1/2}} \dots\dots\dots (1)$$

ここで H, l, k はそれぞれ波高、波向き線間隔、波数。下付の s_0 は初期条件。しかし火焦線のような場合には隣り合う波向き線が交差し、波向き線間隔 $l = 0$ となるため波高無限大となる。

そこで漸近展開によって次数をあげた速度ポテンシャルの近似解は

$$\phi \sim \{g_0 A_i(-\lambda^{2/3} \rho) + i\lambda^{-1/3} h_0 A_i(-\lambda^{2/3} \rho)\} e^{i\lambda\psi} \cosh \alpha \dots\dots\dots (2)$$

となる。ここで ρ は火焦線からの距離の関数。火焦線で $\rho = 0$ 。 A_i はエアリー関数。 $\alpha = k(h+z)$ 。 h は水深、 z は鉛直上向き。 $\psi = (w^+ + w^-)/2$ 、 w は位相。式(1)では波向き線の交わる点で波高無限大となるが式(2)の g_0 と h_0 は火焦点の近くでも有限のままなので、 $H = G\rho^{-1/4}$ として式(1)を再記すると

$$G_s = G_{s0} \frac{(l_{s0} k_s)^{1/2} \rho_s^{1/4}}{(l_s k_{s0})^{1/2} \rho_{s0}^{1/4}} \dots\dots\dots (3)$$

となる。Lewis²⁾の誘導に従うことにより、 $\rho^{1/4}/(lk)^{1/2}$ が $s \rightarrow 0$ （火焦線近傍）で有限となることが証明できる。したがって波高も発散しない。

3. 直線火焦線

まず簡単な例を考え、この理論の妥当性を検討する。通常とは逆に図1のように一様斜面を岸から沖に波が斜めに進行するとき波は全反射し、波の折り返し点が海岸線と平行に連なる(図2)。この包絡線が火焦線となる。

計算で対象としたのは水深波長比0.11の一様水深部から波を海岸線と50度の角度で入射させた。また一様水深から一様勾配に移るとき勾配の不連続が生じるため、緩和曲線を入れた。

エアリー関数を含んだ式から得られた表面変動を図3に示す。これを見ればわかるように火焦線($x/L_0 = 12.3$)近傍でも波高は発散していない。また、火焦線をすぎたあたり(波向き線のない部分)の波高がでているのはエネルギーの漏れが見られるためである。

4. 球面浅瀬

次に球面浅瀬上の波動を考える。対象とする地形は一様水深部に球状の浅瀬があるものである。波向き線方程式を用いて波向き線を書くと図4のようになる。波向き線は球面後部で一度、焦点を形作り、その後、包絡線を作る。この包絡線を拡大したものが図5である。このように球面浅瀬の火焦線は火焦点から2本のびている。また、構成自体も複雑でエアリー関数を用いた方法を使用するのは非常に難しい。そこで幾何光学の近似解に波向き線の重なる位置で位相差を考

慮して求めた波高が図6である。実験値は同じ地形を用いている伊藤ら⁴⁾のものを使用した。求めた値は包絡線を含んだ部分、図4では $y/L_0 = 2$ の線上での値を示したものである。火焦線上では無限大に発散しているが、波向き線の重なる位置では比較的落ち着いた値となっている。

5. おわりに

直線火焦線でエアリー関数を用いる方法は火焦線近傍では有限な解を与えることがわかった。しかし、球面浅瀬は非常に複雑な火焦線を持っているため、エアリー関数での取り扱いは注意が必要である。また、幾何光学近似でも火焦線のごく近傍では波高は発散するが、そのほかの場所では比較的实验値に近い。

参考文献

- 1) Ludwig,D.,Uniform asymptotic expansions at a caustic,Comm.Pure and Appl. Math., pp215-250,1965
- 2) Lewis,R.M.,N.Bleistein,and D.Ludwig,Uniform asymptotic theory of creeping waves,Comm.Pure and Appl.Math.,295-328,1967
- 3) Chao,Y.-Y.,Wave field near a smooth caustic,J.geograph.res.,pp7401-7408,1971
- 4) 伊藤喜行・谷本勝利：波向き線交差領域での波の屈折，第19回海岸工学講演会論文集 pp325-328,1972

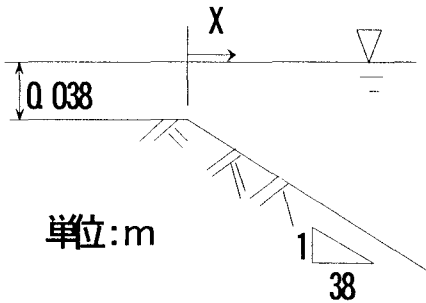


図-1 一様斜面

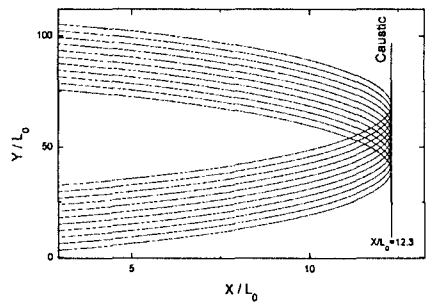


図-2 一様斜面上の表面変動

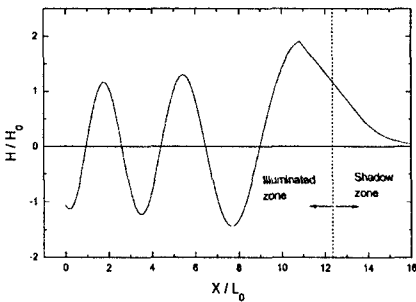


図-3 一様斜面上の波向き線

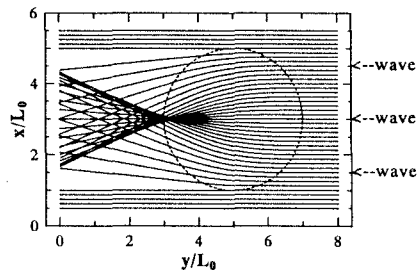


図-4 球面浅瀬上の波向き線

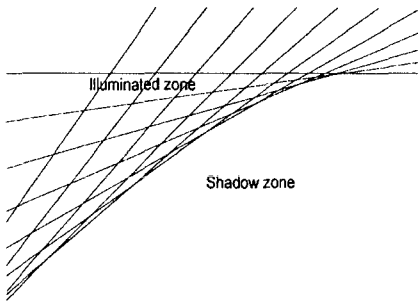


図-5 火焦線拡大図

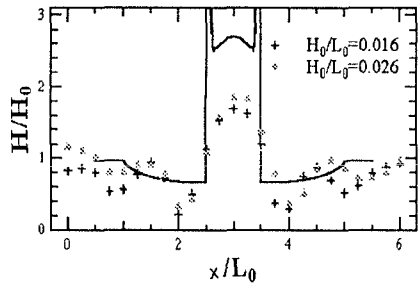


図-6 $y/L_0 = 2$ 上の波高比