

有限な斜面上を伝播する長波の特性

東北大学大学院 学生員 ○越村俊一
東北大学工学部 正 員 今村文彦
東北大学工学部 正 員 首藤伸夫

1. 序論

古くから斜面上を伝播する長波がどの様に變形するかという問題は数多くの研究者により取り扱われてきた。しかし特に平面2次元における波動場の記述は数学的に非常に難解であり、またエッジ波の理論解析等で用いられる半無限一様勾配の斜面モデルはその適用性に限界がある。Schafferら(1992)は沖側に水平床を有する一様勾配斜面上を伝播するエッジ波の解析を行っているが、斜面上の解の分散関係について検討したのみで定量的な評価は行っていない。より実用的な地形モデルを用いた簡便な解法が必要であろう。

ここでは、有限な水深を持つ水平床から斜め入射し斜面上を伝播する長波の挙動を線形理論に基づき解析する。得られた理論解から斜面への入射条件に関する波高の変化特性を検討する。また、Shuto(1972)により求められた斜面上の解との比較を行うことにより本理論の妥当性を検討し、本理論が実用上十分な精度を有することを示す。

2. 理論解の誘導

本研究で採用する海底地形モデルは沖合に水平床を有する一様勾配の直線上海岸とする(図-1)。座標系はx軸を岸沖方向、y軸を沿岸方向にとる。斜面長はa、斜面勾配はs、水平床部の水深は h_0 である。支配方程式は以下の線形長波の波動方程式である。 ξ は静水面からの水位変動を表す。

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(gh \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(gh \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \quad (1)$$

いま運動は周期的であると仮定して、水平床上の解は(2)式で与えられる。 ω は角周波数、 α, β はそれぞれx, y方向の波数であり、()内第1項は入射波成分、第2項は反射波(後退波)成分を表す。一方、斜面上の解は(3)式のように仮定する。(2),(3)式中の係数A, Bは複素振幅である。

$$\xi_1 = \left\{ e^{-i\alpha(x-a)} + A e^{i\alpha(x-a)} \right\} \cdot e^{i(\beta y - \omega t)} \quad (2) \quad \xi_2 = B \eta(x) \cdot e^{i(\beta y - \omega t)} \quad (3)$$

(3)式を(1)式に代入し、さらに(4)式に示す変数変換により新たな支配方程式(5)を得る。

$$z = 2\beta x, \quad \eta = e^{-z/2} \cdot f(z) \quad (4) \quad z \frac{d^2 f}{dz^2} + (1-z) \frac{df}{dz} + \lambda f = 0, \quad \lambda = \frac{\omega^2}{2g\beta s} - \frac{1}{2} \quad (5)$$

(5)式の一般解は(6)式で表され、斜面上の線形長波の周期解は(7)式のようになる。

$$f(z) = F(-\lambda, 1; z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-k+1)}{(k!)^2} \cdot z^k \quad (6)$$

$$\xi_2 = B \eta(x) \cdot e^{i(\beta y - \omega t)} = B e^{-\beta x} F(-\lambda, 1; 2\beta x) \cdot e^{i(\beta y - \omega t)} \quad (7)$$

(5)式中のパラメータ λ は次式のように書き換えられる。

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2}{g\beta s} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2}{\beta} \cdot \frac{a}{gh_0} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{a}{L_0} \right)^2 \cdot \frac{4\pi^2}{a\beta} - 1 \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{L_0} \cdot \frac{2\pi}{\sin \theta_0} - 1 \right) \quad (8)$$

ここで、aは斜面長、 L_0 は入射波波長、 θ_0 は斜面への入射角である。すなわち λ は、斜面長と入射波波長の比 a/L_0 、および入射角 θ_0 によって決定されるパラメータであることが分かる。

(6),(7)式中の関数 $F(-\lambda, 1; z)$ は合流型超幾何関数である。図-2に関数 $\eta(x)$ の例を示す。合流型超幾何関数は、 λ が非負整数である場合を除き、 $z = \infty$ (無限遠)において特異点をもつ級数解であるが、本研究では斜面長は有限であり、水平床上の解との接続を行うために $z = \infty$ で特異点を有することは問題とはならない。すなわち斜面への入射条件を表す全ての λ に対して斜面上において解が存在するのである。

3. 斜面上の解の振幅の変化特性

水平床と斜面上の解を接続し斜面上の解の複素振幅Bを求めると以下ようになる。

$$B = \frac{2 \cdot i e^{z_0/2}}{iF(-\lambda, 1; z_0) + \tan \theta_0 \cdot F(-\lambda, 1; z_0) + 2\lambda \tan \theta_0 F(-\lambda + 1, 2; z_0)} \quad , \quad z_0 = 2\beta a = \frac{4\pi a}{L_0} \sin \theta_0 \quad (9)$$

上式から汀線での波高は、斜面長-入射波波長比及び斜面への入射角に依存することが分かる。図-3に入射角を固定して求めた斜面長-入射波波長比に関する振幅の変化特性を示す。図の縦軸は複素振幅 B の絶対値をとってある。斜面長-入射波波長比が小さな場合、つまり斜面長に比して入射波の波長が十分長い場合には斜面上の振幅の値は小さく、波高増幅は発生しない。斜面への入射角に関して振幅の変化を見てみると、入射角が増加するに従い振幅の値は小さくなる。一様水深部から斜面に対し斜め入射した場合の長波の波高は直に入射した場合に形成される重複波の波高を越えることはない。小角度入射(10,30度)の場合には振幅は斜面長-入射波波長比の増加に伴い階段状に変化しながら増加していく。一方、大角度入射(60,80度)の場合には小角度入射の場合と同様の増加傾向を示すものの、ある斜面長-入射波波長比において増幅する場所が周期的に見られる。

4. 1次元伝播問題における打ち上げ高との比較

沖側水平床部から一様勾配斜面に対し直に入射した場合の長波の打ち上げ高はShuto(1972)により次式のように求められている。ここで J_0, J_1 はそれぞれ0次,1次の第1種Bessel関数である。

$$R = \frac{2}{\sqrt{J_0(4\pi \cdot a/L_0)^2 + J_1(4\pi \cdot a/L_0)^2}} \quad (10)$$

図-4はShuto(1972)により求められた打ち上げ高と本理論における零度入射の場合の解との比較を示したものである。両者は非常によく一致しており本理論の妥当性が示されている。Euler座標を用いた線形理論においても実用上十分な精度をもち得る。

5. 結論

線形理論に基づき水平床から斜め入射し斜面上を伝播する長波の理論解を求め、斜面への入射条件(斜面長-入射波波長比,入射角)に関して波高の変化特性を検討した。入射波波長が斜面長に比して非常に長い場合には波高増幅は発生しない。しかし入射波波長が斜面長と同スケールあるいは斜面長に比して長くなるにつれ顕著な波高増幅が発生することが分かった。大角度入射の場合には小角度入射の場合に比べ波高は低いものの斜面長-入射波波長比に関して周期的に変化し、より複雑な挙動を示すことが分かった。

本理論における零度入射の場合の解と1次元伝播における斜面上の重複波の解との比較により本理論の妥当性及び実用性が示された。

参考文献

- 越村俊一・今村文彦・首藤伸夫: 斜面上におけるエッジ波の励起, 東北地域災害科学研究第34巻, pp.11-20, 1998.
Schaffer, H.A. and Jonsson, I.G.: Edge Waves Revisited, Coastal Engineering, 19, pp.349-368, 1992.
Shuto, N.: Standing Waves in front of a Sloping Dike, Coastal Engineering in Japan, Vol.15, pp.13-23, 1972.

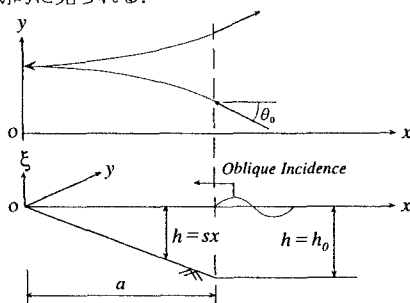


図-1 斜面モデル及び座標系

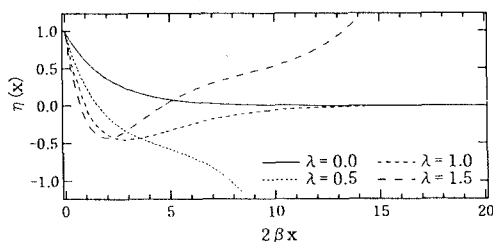


図-2 斜面上の解の例

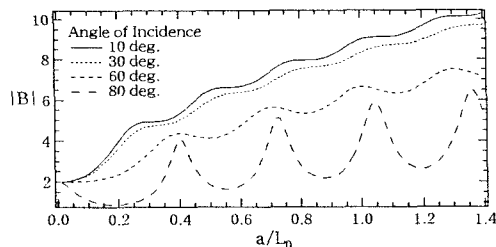


図-3 斜面長-入射波波長比に対する振幅の変化

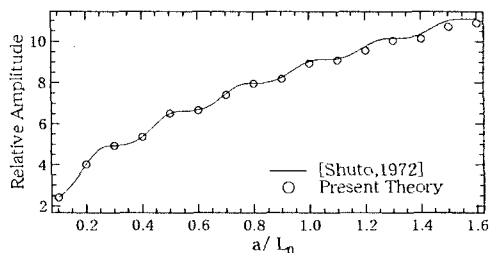


図-4 1次元伝播における斜面上の解との比較