

II-35

単純な境界条件を用いた水路群形成モデル

東北大学工学部 ○学生員 山口里実
東北大学工学部 正員 泉典洋

1. はじめに

水路群がほぼ等間隔に並んでいる地形を見ることがある(図-1). 本研究は,線形安定解析によって,斜面上に形成される水路群の初期形成間隔を予測するモデルを提案するものである.これまで提案されてきたモデルは,移流慣性の項を無視した等流近似モデルが用いられている.このようなモデルでは実現象を説明できていない.そこで本研究では,非常に単純な条件を用いて解析を容易にすることによって,複雑な移流慣性項を無視しないで解析を行う.

2. モデル

本研究では,水路群初期形成に関する線形安定問題の基本特性を知ることを目的とし,仮想的ではあるが解析の容易な2つのモデル(図-2,3)を考える.いま一定勾配 S を有する斜面上に流速 U ,水深 D の等流状態にあるシートフローが生じていて,それぞれ次のような平衡状態が実現しているとする.

(i)浸食による水路群形成モデル(図-2): 浸食されやすい区間はシートフローの持つ底面剪断力に応じた速度で浸食されるため一定の速度で低下していくことになる.いま,斜面上ではこの浸食速度と隆起速度が釣り合っているとする.

(ii)土砂輸送による水路群形成モデル(図-3): 非粘着性土砂の区間ではシートフローの持つ掃流力に応じた掃流砂が生じている.いま,流入土砂と流出土砂が釣り合っているとする.

このような平衡状態ではそれぞれ斜面の勾配は一定に維持されることになる.この平衡状態に対してそれぞれ横断方向に波数 $\bar{k}$ を有する微小な擾乱を与えてみる.擾乱の成長速度は波数 $\bar{k}$ の関数となることが期待され,成長速度を最大にする卓越波長が斜面上に実際に現れる水路群の間隔であると考えられる.

3. 定式化

3.1. 支配方程式

無次元化した浅水方程式及び連続の式は次のようになる.

$$F^2 \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial h}{\partial x} - \beta \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} + (u^2 + v^2)^{1/2} u h^{-1} \right] \quad (1)$$

$$F^2 \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial h}{\partial y} - \beta \left[\frac{\partial \eta}{\partial y} + (u^2 + v^2)^{1/2} v h^{-1} \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial u h}{\partial x} + \frac{\partial v h}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

ここで $F^2 = U^2 / (gD)$, $\beta = SL / D$ である.無次元化の際,次式を用いた.

河床高の時間変化は(i),(ii)の場合それぞれ次のように表される.

$$(i) \text{浸食:} \quad (1 - \lambda_p) \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t}} = -\alpha \bar{\tau}^{3/2} + \bar{\sigma} \quad (4)$$

ここで λ_p は空隙率, $\alpha \bar{\tau}^{3/2}$ は浸食速度, $\bar{\sigma}$ は隆起速度である.

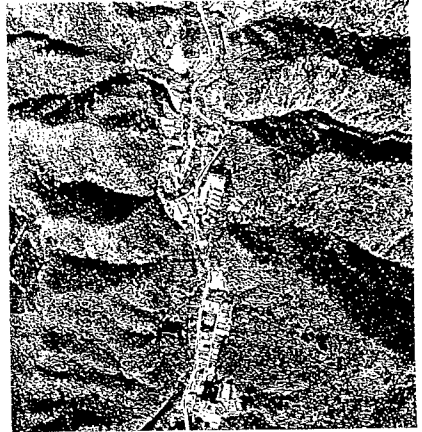


図-1 斜面上に等間隔で並ぶ水路群
(仙台市青葉区作並付近)

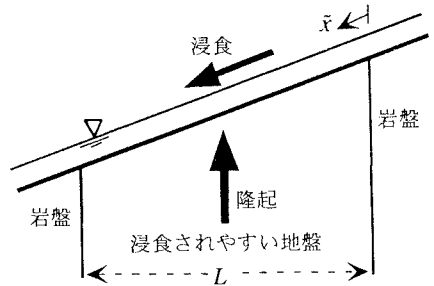


図-2 浸食による水路群形成モデル

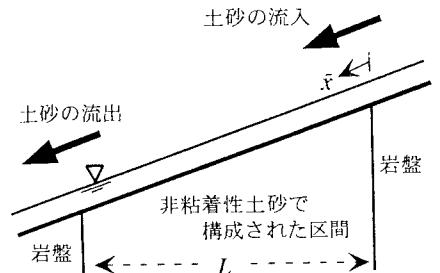


図-3 土砂輸送による水路群形成モデル

式(4)を $\tilde{t} = Tt$, $T = \frac{(1-\lambda_p)SL}{\alpha(\rho C_f U^2)^T}$ で無次元化する.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\left(u^2 + v^2\right)^{3/2} + 1 \quad (5)$$

$$(ii) \text{土砂輸送: } (1-\lambda_p) \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \tilde{q}_{bx}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{q}_{by}}{\partial \tilde{y}}\right) \quad (6)$$

ここで $(\tilde{q}_{bx}, \tilde{q}_{by})$ は掃流砂量ベクトルであり Meyer-Peter&Muller 公式を用いて次式で表されるものとする.
 $(\tilde{q}_{bx}, \tilde{q}_{by}) = \tilde{q}_b (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)^{-1/2} (\tilde{u}, \tilde{v})$, $\tilde{q}_b = 8(\tau^* - \tau_{cr}^*)^{3/2} (R_s g D_s^3)^{1/2}$

式(6)を $\tilde{t} = Tt$, $T = \frac{(1-\lambda_p)SL^2 R_s g}{8C_f^{3/2} U^3}$ で無次元化する.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\left[\frac{\partial(u^2 + v^2)u}{\partial x} + \frac{\partial(u^2 + v^2)v}{\partial y}\right] \quad (7)$$

無次元化した境界条件は次のようになる.

$$x=0, \quad \eta=0; \quad x=1, \quad \eta=-1 \quad (8a,b)$$

4. 線形安定解析

平衡状態では次式が成り立っている.

$$u=1, \quad v=0, \quad h=1, \quad \eta=-x \quad (9a,b,c,d)$$

この平衡状態に対して横断方向にサイン形状を有する微小な擾乱を与える. そのとき流速, 水深, 斜面形状は次のように表される. (c.c. は複素共役を表す)

$$u = 1 + au_1 \exp[i(\lambda x + \omega t) + \Omega t] \cos ky + c.c. \quad (10a)$$

$$v = av_1 \exp[i(\lambda x + \omega t) + \Omega t] \sin ky + c.c. \quad (10b)$$

$$h = 1 + ah_1 \exp[i(\lambda x + \omega t) + \Omega t] \cos ky + c.c. \quad (10c)$$

$$\eta = -x + a\eta_1 \exp[i(\lambda x + \omega t) + \Omega t] \cos ky + c.c. \quad (10d)$$

境界条件(8)より式(10)中の λ は次の条件を満たす.

$$\lambda = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

ここで n は流下方向のモード数を表している.

(i) 浸食: 式(10)を式(1),(2),(3)及び(5)に代入し, a の 1 次のオーダーの項だけ残すと次の方程式が得られる.

$$\begin{pmatrix} i\lambda F^2 + 2\beta & 0 & i\lambda - \beta & i\lambda\beta \\ 0 & i\lambda F^2 + \beta & -k & -k\beta \\ i\lambda & k & i\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \Omega + i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ h_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (12)$$

式(17)が自明でない解を持つ条件は次式で表される.

$$\begin{vmatrix} i\lambda F^2 + 2\beta & 0 & i\lambda - \beta & i\lambda\beta \\ 0 & i\lambda F^2 + \beta & -k & -k\beta \\ i\lambda & k & i\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \Omega + i\omega \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

式(18)より次のような関係が導かれる.

$$f_i(\Omega, \omega, k, \lambda, F, \beta) = 0 \quad (14)$$

(ii) 土砂輸送: 式(10)を式(1),(2),(3)及び(7)に代入し, 浸食の場合と同様に解を持つ条件は次式で表される.

$$\begin{vmatrix} i\lambda F^2 + 2\beta & 0 & i\lambda - \beta & i\lambda\beta \\ 0 & i\lambda F^2 + \beta & -k & -k\beta \\ i\lambda & k & i\lambda & 0 \\ 3i\lambda & k & 0 & \Omega + i\omega \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

式(15)より次のような関係が導かれる.

$$f_i(\Omega, \omega, k, \lambda, F, \beta) = 0 \quad (16)$$

5. 結果及び考察

式(14),(16)がそれぞれの場合における擾乱の波数 k と発達率 Ω の関係式である. 図-4 は式(14)より得られたもので, 浸食による水路形成の場合, $F > 1$ (流れが射流)であるとき有限な卓越波長が存在し, F が大きくなるほど卓越波長は小さくなる, つまり形成される水路間隔が小さくなることを示している. 図-5 は式(16)より得られたもので, 水路形成が土砂輸送による場合, F に関係なく有限な卓越波長が存在し, $F = 0.5$ 程度の時形成される水路間隔が最大になることを示している. また β を変化させてみたところ, 水路形成が浸食・土砂輸送によるいずれの場合も β を大きくしていくと有限な卓越波長が存在しなくなり, 等流近似モデルでは有限の水路間隔を予測できないことが示された. そして適当な β 及び F の値を与えることによって, 水路間隔が斜面長のオーダー程度になることが示された.

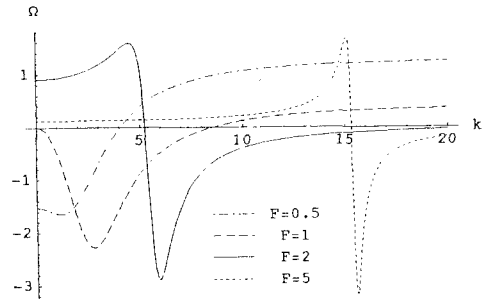


図-3 浸食によって水路群が形成される場合の k 及び F による Ω の変化 ($n=1, \beta=1$)

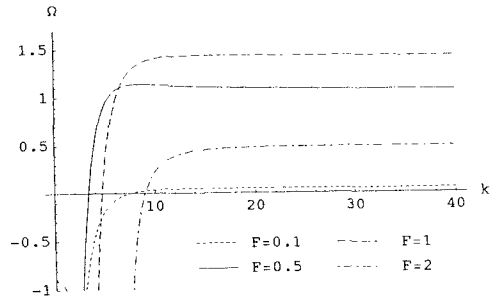


図-4 土砂輸送によって水路群が形成される場合の k 及び F による Ω の変化 ($n=1, \beta=1$)