

II - 7

MAC 法における境界条件に関する基礎検討

東北大学大学院 学生員 ○永川賢治  
 東北大学工学部 正員 今村文彦  
 東北大学工学部 正員 首藤伸夫

1. はじめに

数値計算において、水路実験などの波の伝播を再現するには、波の入力条件および計算領域の境界条件等を定める必要がある。MAC 法を用いた数値計算においては、加えて、マーカーの補給という問題も生じる。ここでは、孤立波を入射させた場合について、境界における圧力の理論値と透過境界条件から与えられる数値計算値との比較、波の伝播について考察した結果を記す。

2. 境界条件

図-1 に示すように、壁の右側が実セルで、左側が仮想セルであると仮定する。物理量は図に従うものとする。連続の条件より、仮想セルでの速度成分を定める。一般に MAC 法では、境界壁（水を通さない）条件として、次のような条件を設定する。ここで、仮想セルの接線方向速度成分が、実セルと同符号の場合を Slip 条件、異符号の場合を Non-slip 条件とする。

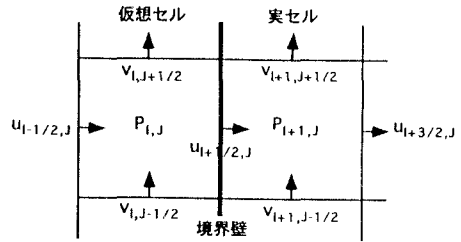


図-1

垂直壁の場合

(i) Slip 条件

$$u_{l+1/2,j} = 0, u_{l-1/2,j} = -u_{l+3/2,j}, v_{l,j} = v_{l+1,j}$$

$$P_{l,j} = P_{l+1,j} - dx \times Gx$$

(ii) Non-Slip 条件

$$u_{l+1/2,j} = 0, u_{l-1/2,j} = u_{l+3/2,j}, v_{l,j} = -v_{l+1,j}$$

$$P_{l,j} = P_{l+1,j} - dx \times Gx$$

ここで、Gx は x 軸方向の単位質量当たりの体積力を示す。

実際の水理実験では、ある観測地点において、波高、流速分布を比較的容易に得ることができる。しかし圧力分布を直接求めることは難しい。そこで、ある地点での波高、流速の鉛直分布が得られたと仮定し、数値計算上で圧力境界をどのように定めればよいかを検討する。ここでは、想定できる2つのケースを比較してみる。

ケース1: Navier Stokes Eq から直接定める。

Navier Stokes Eq の x 方向成分 (式-1) について差分化すると、 $P_{l,j}, P_{l+1,j}$  に関して (式-2) のような関係が得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = Gx - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u \quad \cdots \cdots \text{(式-1)}$$

$$P_{l,j} = P_{l+1,j} + \frac{u_{l+1/2,j}^{p+1} - u_{l+1/2,j}}{dt} \times dx + X_{l+1/2,j} \times dx - Gx \times dx \quad \cdots \cdots \text{(式-2)}$$

ここで、 $X_{l+1/2,j}$  は移流項の差分項である。添字 P+1 は、次の時間ステップを示す。

(式-2) により、境界圧力条件  $P_{0,j}$  を定める。この式において圧力を定めるには実セルの速度分布と仮想セルの速度分布が必要であるが、ここでは両方とも孤立波の理論値を各計算ステップごとに入れる。なお水理実験においてこの境界条件を用いる場合には、移流項の差分のため、メッシュ間隔だけ離れた2地点での  $u, v$  の速度分布が必要になる。

ケース2: 境界壁があるとして定める。

従来の MAC 法による境界条件の定め方と同様に、仮想セルの速度、圧力境界を定める。この場合、必要な条件は、1 地点での速度データのみであり実験条件を導入しやすい。まず図-1 において、実セルに対して、 $D = (u_{l+3/2,j} - u_{l+1/2,j})/dx + (v_{l+1,j+1} - v_{l+1,j})/dy = 0$  でなければならない。仮想セルに対しても、 $D = (u_{l+1/2,j} - u_{l,j})/dx + (v_{l,j+1} - v_{l,j})/dy = 0$  の条件が満たされなければならない。ここで、Non-Slip 条件  $v_{l,j} = -v_{l+1,j}$  を与えると、上式より  $u_{l+1/2,j} = u_{l+3/2,j}$  が与えられる。これらの速度境界条件を (式-2) に代入すると、圧力条件として (式-3) が得られる。

$$P_{l,j} = P_{l+1,j} + \frac{u_{l+1/2,j}^{p+1} - u_{l+1/2,j}}{dt} \times dx - Gx \times dx - \frac{dx}{\text{Re}} \left\{ \frac{u_{l+3/2,j} - 2u_{l+1/2,j} + u_{l-1/2,j}}{(dx)^2} + \frac{u_{l+1/2,j+1} - 2u_{l+1/2,j} + u_{l+1/2,j-1}}{(dy)^2} \right\} \quad \cdots \cdots \text{(式-3)}$$

### 3. マーカー補給

MAC 法では、セル中のマーカー粒子の存在によって、流体セルか空セルかを判断する。そのため片側境界より波高、速度データを導入する際、流体セルにマーカーを補給する必要がある。しかし粒子の補給のタイミングは、理論的には決められず、またマーカーの数の厳密な規定はない。また砕波のような現象を砕現するには、十分な数のマーカーが必要である。ここでは、図-2 に示すように、境界に隣り合うすべての実セルにおいて、8 個以上のマーカーが存在していないときに、その不足分を各計算ステップごとセルに均等に配置して補給している。

### 4. 計算結果

図-3 には、ケース 1、ケース 2 の境界条件での計算結果を示す。計算格子間隔は 0.01 (m)、CFL 条件を満たすように、計算時間間隔  $\Delta t$  を定めている。入射波には、波高 5 (cm)、水深 23 (cm) の孤立波を用い、理論解で与えられている波高、流速成分を境界セルに与えている。図-4 には、 $x = 1.0$  (m) 地点で、理論孤立波が最大波高を示す時刻  $t = 1.54$  (sec) における、同地点でのケース 1、ケース 2 での水平、鉛直速度成分  $u, v$ 、圧力 ( $p/\rho$ ) の鉛直分布を示す。

### 5. 考察

図-3 において、ケース 1、ケース 2、伴に理論孤立波とほぼ波形が一致している。しかし MAC 法で計算した自由表面では、幾分不連続が生じている。

また図-4 において、 $x = 1.0$  (m)  $t = 1.54$  (sec) での流速成分を理論孤立波と比較すると、理論値に比べて、底面から水面までの流速の変化幅が小さくなっており、水平速度成分は、ケース 1、ケース 2 とともに、自由表面付近で、理論値より小さくなる傾向がある。鉛直速度成分も若干理論値と異なっている。格子間隔の大きさ、表面セルでの圧力の与え方などが、これらの原因と考えられる。圧力に関しては、ケース 1、ケース 2 で理論値とほぼ一致している。

今回計算に用いた、圧力境界条件を N.S eq から直接定める方法 (ケース 1) と、透過境界壁を設ける方法 (ケース 2) では、ほぼ同じような傾向を示す結果に至った。実験条件を数値計算に導入するには、ケース 2 が容易であり、今後このモデルを使って、水路実験の波の伝播を精度よく再現していけるかどうかを、問題点の改善を図りつつ更に検討する必要がある。

#### 参考文献

- 1) 八田夏夫 流れの計算 PP. 82 - 117 (1994)
- 2) 土木学会 水理公式集 PP. 87 - 88 (1974)

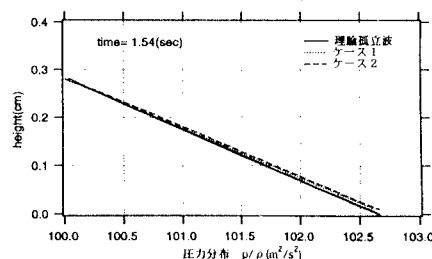
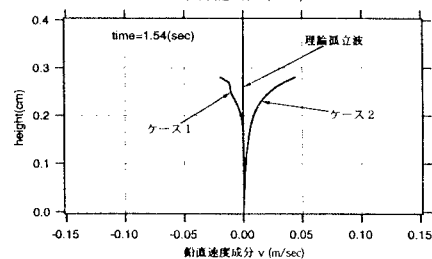
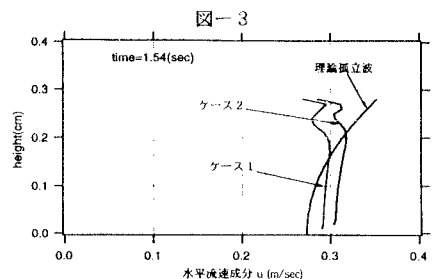
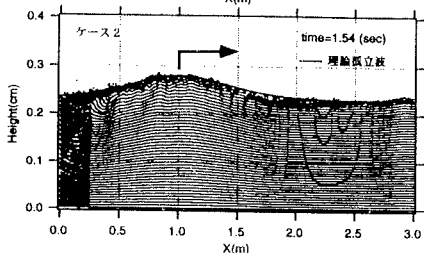
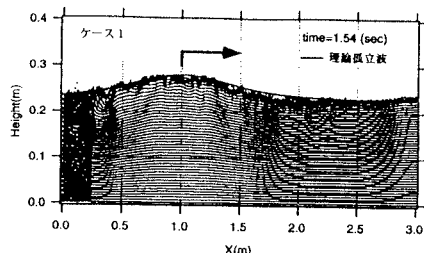
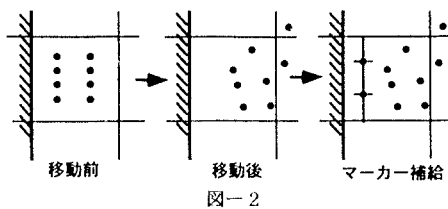


図-4