

空間梁の回転自由度と剛性方程式の定式化について

東北大学大学院 ○学生員 小林 裕
 東北大学工学部 正 員 後藤 文彦
 東北大学工学部 正 員 岩熊 哲夫

1. まえがき

空間梁の弾性座屈などの幾何学的非線形問題においては、その解析法の一つとして剛体変位除去の手法に基づく total-Lagrange 法による有限要素法解析があり、これに基づいた定式化では局所座標系内での剛性方程式を比較的簡単に導く事が出来る。この場合、全体座標系と局所座標系の間の座標変換行列は有限な回転を考慮しなくてはならないが、オイラー角や主軸角といったパラメータを用いる事で座標変換を表わす事が出来る。しかし、局所剛性方程式を全体座標系で重ね合わせるための方法は、大きく二つに分けられ、仮想仕事など何等かのエネルギー原理を考慮し局所系と全体系の外力ベクトルの関係を導く定式化手法と、単純に座標変換行列で結び付ける定式化手法がある。空間においてこの二つの手法による差異を比較した例はあまり無い。

また二次元の場合はエネルギー原理を考慮した方法で得られる接線剛性行列は対称になるが、これを空間に拡張すると必ずしもそうはならない事が問題となっている。著者らはこの非対称の原因は、接線剛性方程式の回転自由度に有限な変位場を定義できない直交三軸座標固定軸回りの回転角を用いる事にあり、有限な回転を表わす座標変換のパラメータをそのまま回転自由度として用いれば接線剛性行列は必ず対称になると考えている。

本研究では、仮想仕事の原理を用い回転自由度をパラメータで表わす場合、回転自由度を直交三軸座標の固定軸回り回転角で置き換えた場合、エネルギー原理に基づかない場合のそれぞれについて接線剛性方程式を導出し、その対称性や解の収束について考察する。

2. 定式化

図-1 のような梁要素の変形後の節点 1 で接する局所座標系を考える。ここで、節点 1, 2 の変位について回転自由度に直交三軸座標固定軸回りの回転角を用いた変位ベクトルを $\bar{\mathbf{d}}_1, \bar{\mathbf{d}}_2$ とし、座標変換に用いる回転パラメータで表わした変位ベクトルを $\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2$ とする。節点 1 に対する節点 2 の全体座標系での相対変位を $\mathbf{r}$ とすれば $\mathbf{r}$ は $\bar{\mathbf{d}}, \underline{\mathbf{d}}$ の関数で表わされる。また局所座標系で表わした相対変位を $\mathbf{r}^\ell$ とすると、局所座標系での外力ベクトル $\mathbf{f}^\ell$ と微小変位理論の剛性行列で関係付ける事が出来る。

$$\mathbf{f}^\ell = \mathbf{K} \mathbf{r}^\ell = \mathbf{K} \mathbf{T}^T \mathbf{r}$$

ここで、 $\underline{\mathbf{d}}$ と仕事をする外力ベクトルを $\underline{\mathbf{f}}$ とし全体系と局所系での仮想仕事等しいとすると、 $\underline{\mathbf{f}} = \mathbf{R} \mathbf{f}^\ell$ という関係が導かれる。これを上式に代入し、全体系での剛性方程式とその接線剛性方程式を得る。

$$\underline{\mathbf{f}} = \mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{T}^T \mathbf{r} \quad \Delta \underline{\mathbf{f}} = \mathbf{K}_{t1} \Delta \underline{\mathbf{d}}$$

また $\bar{\mathbf{d}}$ と $\underline{\mathbf{d}}$ の微小増分同士は $\Delta \underline{\mathbf{d}} = \mathbf{E} \Delta \bar{\mathbf{d}}$ という関係で結び付ける事が出来るため、上式の回転自由度を直交三軸座標固定軸回りの回転角で置き換えた剛性方程式と接線剛性方程式を得る。

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{E}^T \mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{T}^T \mathbf{r} \quad \Delta \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{K}_{t2} \Delta \bar{\mathbf{d}}$$

また仮想仕事の釣り合いをとる代わりに幾何学的な考察から外力ベクトル同士を座標変換行列で結び付けると、

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T} \mathbf{K} \mathbf{T}^T \mathbf{r} \quad \Delta \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{K}_{t3} \Delta \bar{\mathbf{d}}$$

を得る。接線剛性行列 $\mathbf{K}_{t1}$ は対称になるが、 $\mathbf{K}_{t2}, \mathbf{K}_{t3}$ は対称にならない。

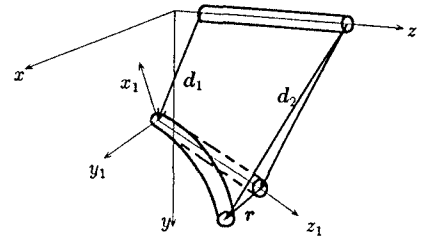


図-1 座標系

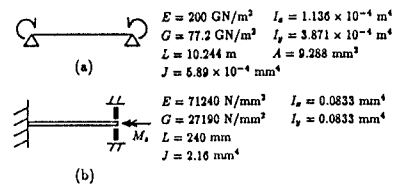


図-2 解析モデル

3. 直線梁の横倒れ座屈

以上のように行った定式化について、それぞれの妥当性と収束速度について比較するため直線梁の横倒れ座屈について解析を行った。図-2 にこの解析モデルの境界条件と材料諸元を示す。また座屈荷重は $M'_{cr} = M\ell/EI_x$ で無次元化してある。図-3 に接線剛性行列 K_{t1} , K_{t2} , K_{t3} で求められた数値解の Torahair *et al.* の解析解への収束状況を、また表-1 に求められた数値解を示す。Torahair の解析解は $M'_{cr} = 0.2968$ となるが、エネルギー原理に基づいた K_{t1} , K_{t2} を用いた場合、要素数 9 程度で解析解に近い値に収束している。エネルギー原理に基づかない K_{t3} の場合、同程度の解に収束するのに 65 要素を必要としているが、最終的に求めた数値解はどの定式化の場合も解析解に比べ 0.2 % 小さい値に収束している。

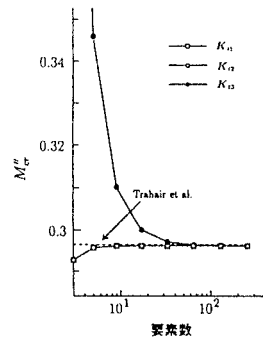


図-3 座屈解の収束

4. Cable-Hockling 問題

Cable-Hockling 問題とは片端にねじれ荷重を受ける正方形断面の片持ち梁の座屈の問題である。この解析モデル及び諸元を図-2 (b) に示す。この梁モデルの半分について 3 定式化とも 60 要素で解析を行った。また荷重と梁先端のねじれ角について $M' = M\ell/\pi EI$, $\theta'_z = \theta_z/\pi$ なる無次元化を行っている。図-4 にこの座屈荷重曲線を示し、紙田、近藤の求めた数値解と比較する。紙田、近藤は座屈後不安定経路に移り、極小点 $(M', \theta'_z) = (-1.96, 1.80)$ で安定な経路に移ったとしているが、エネルギー原理に基づいた K_{t1} , K_{t2} の数値解はこの特徴を満たしている。極小点の値はそれぞれ $(-1.82, 1.83)$, $(-1.85, 1.83)$ と若干ずれはあるものの、この二つの定式化手法には有為な差は無いとい

表-1 横倒れ座屈の数値解

要素数	K_{t1}	K_{t2}	K_{t3}
5	2.957	2.957	3.459
9	2.962	2.961	3.102
17	2.962	2.961	3.000
33	2.962	2.961	2.972
65	2.962	2.960	2.965
129	2.962	2.955	2.963
255	2.962	2.936	2.962

ていい。また K_{t2} で求められた空間的な変形をする様子を図-5 に示す。荷重が零となった所で真円となる特徴的な変形が追跡できている。 K_{t3} では、座屈後、他の経路に近い経路が求まっているが、この要素数では極小点にいたる前に収束しなくなっている。これが直線梁の横倒れ座屈の時と同様、要素数を増やせば改善されるかについては、今回は解析を行っていないため今後の課題とする。

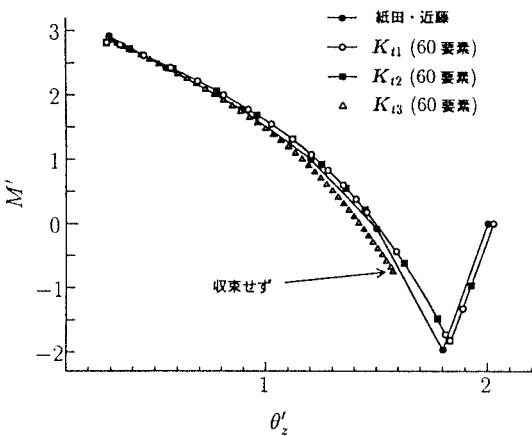


図-4 ねじりモーメントと梁先端のねじれ角の関係

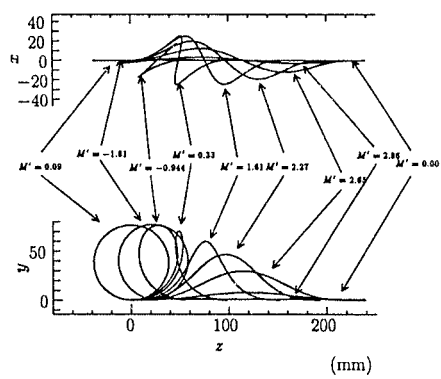


図-5 ねじれ座屈後の変形の様子

参考文献

1) 紙田 徹, 近藤 恭平: 梁の 3 次元大変形の有限要素法解析 (第 2 報), 日本航空宇宙学会誌, 43(1995), pp.344-349