

非偏平な薄肉円筒シェルの座屈後挙動解析

東北大学大学院 ○学生員 河野 公一
 東北大学工学部 正 員 中沢 正利
 東北大学工学部 正 員 岩熊 哲夫

1. まえがき

薄肉円筒シェルの座屈解析におけるひずみ - 変位関係式には, Donnell 型¹⁾と Flügge 型²⁾がよく用いられる. 前者は取り扱いが簡単であるが, シェルが偏平である仮定を用いているため, 初期座屈において非偏平なシェルに対しては精度が悪くなることが八巻ら³⁾によって報告されている. 一方, 後者は比較的厳密で広い範囲にわたる形状に対して適用できるが, 計算が複雑になるため, 座屈後挙動の研究については偏平なシェルに対して前者を用いているものがほとんどである. そこで本研究では, ひずみ - 変位関係式に Flügge 型を用いてより厳密な座屈後挙動を解析し, 非偏平なシェルに対する釣り合い経路について考察した結果を報告する.

2. 解析方法

図-1に示すように, 長さ L , 半径 R , 厚さ t の上下端単純支持の完全薄肉円筒シェルが一様軸圧縮力 Σ を受ける場合を考える. ここに, (u, v, w) はそれぞれ円筒座標軸 (x, y, z) 方向の変位である. ひずみ - 変位関係について, Flügge の式はあらゆる形状のシェルに対応するように全方向の変位 (u, v, w) の2次項を網羅した次の形で表される.

$$\begin{aligned}\kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad \kappa_{xy} = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2R} \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right\} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R}\right)^2 \right\} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R}\right) + \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R}\right) \right\}\end{aligned}$$

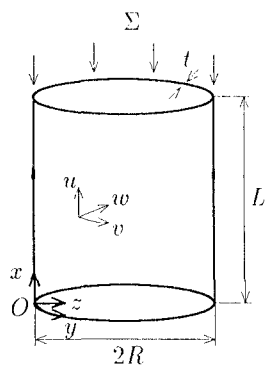


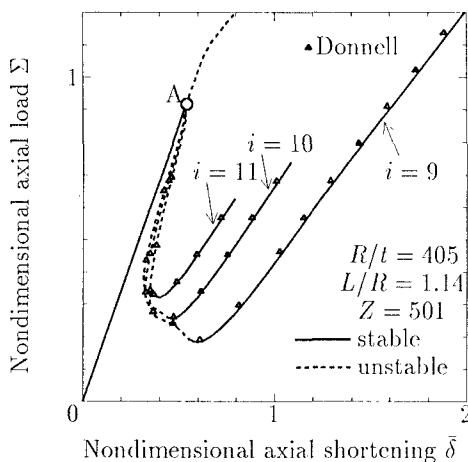
図-1 円筒シェルのモデル

これに対して Donnell の式は, 偏平シェル近似に基づき面外変位 w が面内変位 (u, v) に比べて十分大きいことを前提としているため, 上の式の下線部の項を無視している. 本解析では非偏平なシェルを対象とするため, Flügge の式を用いて非線形シェル理論とエネルギー法に基づく手法により釣り合い経路を追跡する.

3. 解析結果

(1) 偏平な薄肉円筒シェル

形状係数 $Z = 501$ の偏平なシェルの Flügge 型による釣り合い経路を図-2に示す. ここに, 横軸は端部の無次元化軸方向変位量 $\bar{\delta} = -(R/Lt)[u_{i,j}]_{x=0}^x=L$ を表し, (i, j) はそれぞれ周方向の波数, 軸方向の半波数を示す. 図よりシェルが偏平な場合には, Flügge 型による解析結果は, 初期座屈荷重点 A や座屈後の各分岐経路 $(i, j) = (11, 1), (10, 1), (9, 1)$ について Donnell 型による解析結果とほとんど一致することが確認できる.

図-2 釣り合い経路: $\Sigma - \bar{\delta}$ 関係 (偏平)

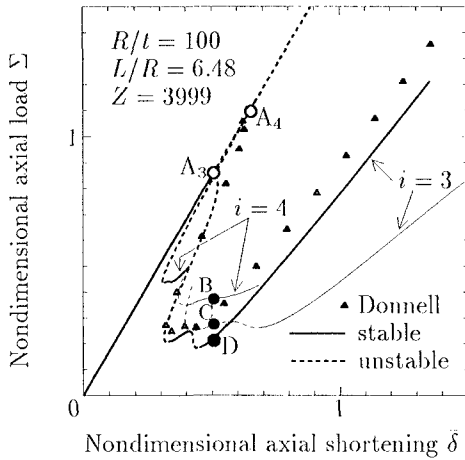


図-3 釣り合い経路： $\Sigma - \bar{\delta}$ 関係 (非偏平)

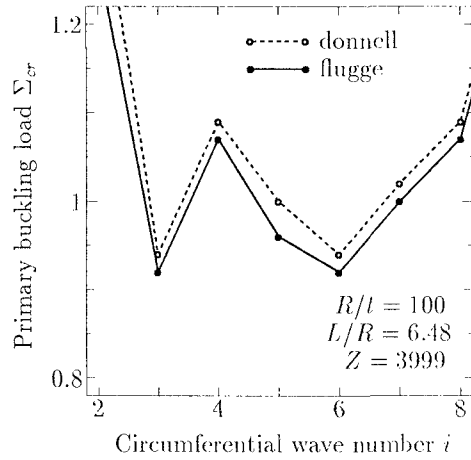


図-4 周方向波数別の初期座屈荷重

(2) 非偏平な薄肉円筒シェル

形状係数 $Z = 3999$ の非偏平なシェルの Flügge 型による釣り合い経路を図-3に示す。ここに、太線は軸方向半波数が $j = 1$ の変形モードの経路で、細線は $j = 3$ の変形モードの経路である。また、Donnell 型による釣り合い経路は $(i, j) = (3, 1)$ の変形モードの経路のみを三角でプロットしてある。これより Donnell 型と Flügge 型とで経路にずれが生じており、非偏平における Donnell 型は、初期座屈荷重のみならず座屈後挙動においても精度が悪くなるのがわかる。

次に初期座屈点について、偏平では図-2の点 A のように多重分岐点のように見られたが、図-3を見ればわかるように、 $i = 3$ の座屈点 A_3 と $i = 4$ の座屈点 A_4 の位置が異なっている。そこで、周方向波数別の初期座屈荷重 Σ_{cr} を調べたのが図-4である。これより初期座屈点は多重分岐点ではなくそれぞれ周方向波数別に存在し、また Donnell 型、Flügge 型いずれも $i = 3, 6$ で初期座屈荷重が最小になるのがわかる。しかし、モード $i = 6$ の座屈後の安定経路は存在しないことから、点 $A_3 (= A_6)$ で座屈し、その直後にモード $i = 6$ の Diamond pattern を形成し、そして Diamond pattern が崩れてモード $i = 3$ に変形するということが考えられる。

最後に飛び移り現象について考える。今、シェルの状態が図-3の原点にあるとする。軸方向変位 $\bar{\delta}$ を制御すると想定すれば、 $\bar{\delta}$ の増加に伴い荷重は初期座屈点 A_3 (図-5-a) に達するまで線形的に増加していく。さらに $\bar{\delta}$ が増加すると、シェルは座屈して安定性を失い、点 A_3 から同じ変位レベルにある安定な釣り合い経路 $(i, j) = (4, 3)$ 上の点 B (図-5-b)、 $(i, j) = (3, 3)$ 上の点 C (図-5-c)、あるいは $(i, j) = (3, 1)$ 上の点 D (図-5-d) に飛び移る。このように非偏平なシェルでは、偏平では見られなかった軸方向半波数の増加が見られることがわかる。

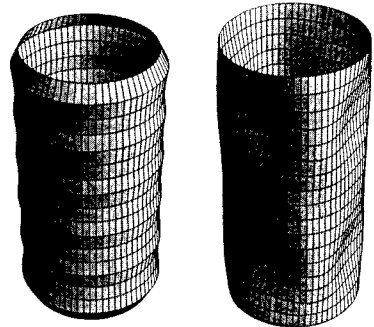


図-5-a A_3 点

図-5-b B 点

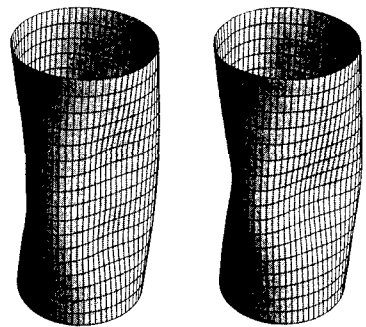


図-5-c C 点

図-5-d D 点

図-5 変形モード ($Z = 3999$)

参考文献

- 1) Donnell, L.H. and Wan C.C.: Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns, *J. of Applied Mech.*, ASME, Vol.17, pp.73-83, 1950.
- 2) Flügge, W.: Die Stabilität der Kreiszyllinderschale, *Ingenieur Arch.*, Vol.3, pp.463-506, 1932.
- 3) Yamaki, N.: ELASTIC STABILITY OF CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS, Elsevier, Amsterdam, 1984.