

I-23

等分布荷重を受ける円環板の統一塑性極限解析

岩手大学工学部 学生員 ○桜井 重紀子

岩手大学工学部 正員 宮本 裕 岩崎 正二 出戸 秀明

1. まえがき

強度理論の新しいシステムである等方性材料に対する統一強度理論〔1〕は、区分線形公式と簡潔な物理的概念を持っており、三つの主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ の影響を全て考慮しているため応用範囲が広い。特に、金属材料に対して適用できる統一降伏規準の表現は区間線形となっているため、軸対称構造物の塑性極限解析を行うのに有効である。古くから行われている剛塑性円環板の塑性極限解析は、ほとんどトレスカやミーゼスの降伏規準〔2〕を用いて行われているのが一般的である。しかしこれらの研究では、降伏規準の選択が解析結果にどのような影響を与えるかについてはほとんど注意が払われていない。本研究の目的は、統一強度理論の一部である統一降伏規準を用いて等分布荷重を受ける円環板の耐荷力、モーメント場、変位場を導いてトレスカやミーゼスの降伏規準等の古典強度理論との比較検討を行い、円環板の塑性挙動に対する降伏規準の影響を明らかにすることである。

2. 統一降伏規準

図-1は、無次元化された半径方向曲げモーメント m_r と円周方向曲げモーメント m_θ によって表された統一降伏規準を示す。統一降伏規準は塑性流れが二つの大きな方の主せん断応力によってコントロールされると仮定している。中間主せん断応力の影響を反映する重みパラメータ b が0から1まで変化するとき、一連の区間線形規準が導かれる。特に統一降伏規準において $b=0$ の時はトレスカ規準、 $b=1$ の時は双せん断応力規準が得られる。 $b=0.5$ の時には、ミーゼス規準を近似することができる。

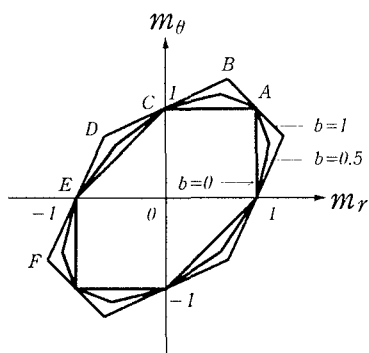


図-1 統一降伏規準

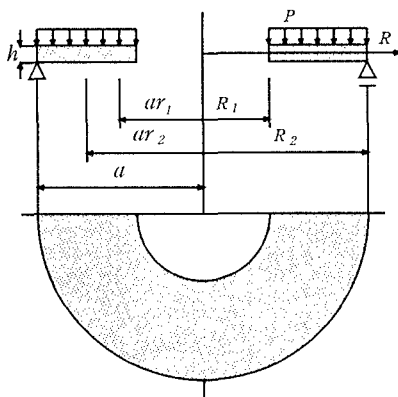


図-2 単純支持円環板

3. 解析手法

図-2は等分布荷重 P を受ける外半径 R_2 、内半径 R_1 及び厚さ h の外側が単純支持端、内側が自由端を有する円環板を示している。板は統一降伏規準に従う完全剛塑性材料からなると仮定する。塑性極限状態において円環板の釣り合い方程式と降伏条件は次のようになる。

$$d(rm_r)/dr - m_\theta = p\beta^2/2 - pr^2/2 \quad (0 \leq r \leq 1) \quad (1)$$

$$m_\theta = a_i m_r + b_i \quad (i=1,2) \quad (2)$$

ここで、 $r = R/a$, $m_r = M_r/M_0$, $m_\theta = M_\theta/M_0$, $p = Pa^2/M_0$ ただし、 M_r, M_θ, M_0 は半径方向、円周方向曲げモーメント及び極限モーメントを表す。 a_i, b_i は A から C までの二つの線分に対応する定数である。境界条件及びモーメントと剪断力の連続条件を用いることで各分割半径 r_i 内の内部モーメント場の解析式が導かれる。ただし図-2に示す ar_1, ar_2 は、図-1のBに対応する分割半径を示す。

4. 解析結果と考察

上に述べた解析から、降伏規準を考慮した円環板の統一塑性極限解析が得られる。 m_r , m_θ の変化は統一降伏規準によると二つの場合に分かれる。Case1 は外側の半径に対する内側の半径の比 β が限界半径比 β_0 より大きい場合 ($\beta \geq \beta_0$) であり、Case2 は ($\beta \leq \beta_0$) の場合である。板全体のモーメント場は、 $m_r \geq 0$ と $m_\theta \geq 0$ を満たす。図-3 と図-4 は、それぞれ Case1 と Case2 に対応する半径比 $\beta=0.5$ と 0.1 の時の半径方向と円周方向のモーメント場を表している。Case1 の場合は、図-3 に示すように m_θ には一つのピークのみ存在する。 m_r は降伏規準の影響を受けない。一方、図-4 に示す Case2 の場合は、 m_θ の二つのピークは $r=r_1$ と $r=r_2$ の分割半径で生じる。モーメント分布における降伏規準の影響は、Case1 より Case2 の方が大きい。全塑性極限荷重 P_T を $P_T = \pi(R_2^3 - R_1^3)P$ と定義すると、図-5 は $b=0.5$ と $b=1$ の統一降伏規準によって計算された塑性極限荷重と、トレスカ規準で計算された塑性極限荷重との差の比を、内部半径と外部半径の比 $\beta=0.01$ から $\beta=0.99$ まで変化させて示したものである。 $b=0$ に対する $b=0.5, b=1$ の塑性極限荷重の最大差異比は、 $\beta=\beta_0$ の限界半径比の時に生じ、それぞれ 13.9%, 23.0% になった。図-6 は塑性極限荷重に及ぼす降伏規準の影響 (b の変化) を $\beta=0.1$ の場合について示したグラフである。 $\beta=0.1$ の塑性極限荷重は、統一降伏規準の三つの特別な場合 $b=0, 0.5, 1$ に対してそれぞれ 5.555, 6.307, 6.790 となる。

5. 結論

双せん断応力規準に対応する $b=1$ の時の統一降伏規準は、塑性極限荷重、モーメント場、速度場の上界を導く。一方トレスカ規準に対応する $b=0$ の統一降伏規準はそれらの下界を与える。等方性金属材料でできた円環板のすべての塑性極限解は、この論文で得られた二つの境界の間にある。本研究では、塑性極限状態における円環板の統一解を求めた。その解は降伏規準の影響を含むことから、板の設計において応用範囲の広いものであり、ミーゼス規準もトレスカ規準もこの利点を持っていない。塑性極限荷重は静的許容及び動的許容（釣り合い方程式、応力境界条件、降伏条件、流れ条件及び速度境界条件をすべて満足する）であるため、この論文で与えられた解は、問題に対する厳密解である。

参考文献

- [1] Yu Maohong, *A new system of strength theory*, Xian Jiaotong University Print, China (In chinese). (1992).
- [2] H.G. Hopkins and W. Prager, The load carrying capacities of circular plates, *J. of Mech. Phys. Solids*, 2, 1-13, (1953).

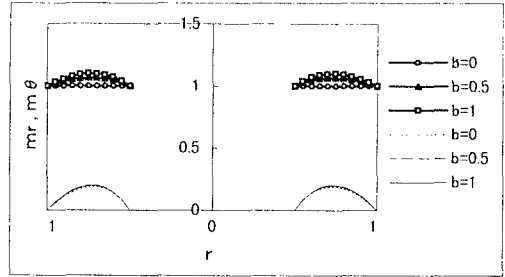


図-3 Case1 のモーメント場 ($\beta=0.5$)

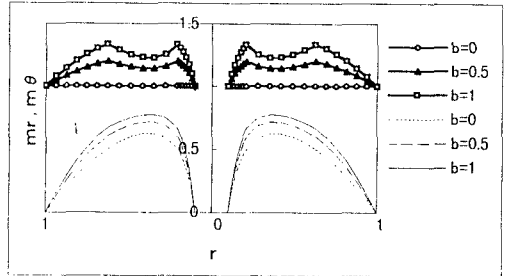


図-4 Case2 のモーメント場 ($\beta=0.1$)

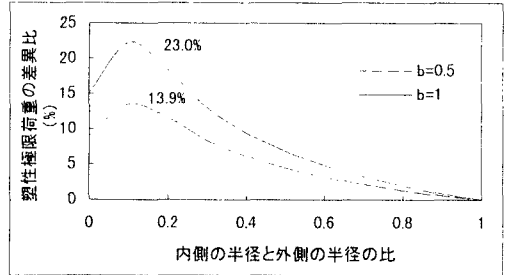


図-5 塑性極限荷重の差異比

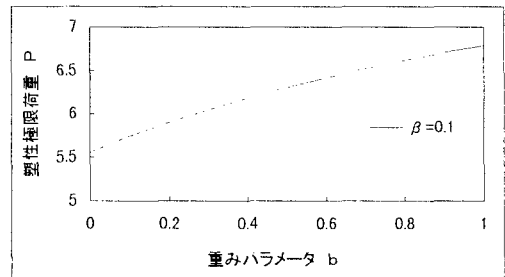


図-6 降伏規準の影響 ($\beta=0.1$)