

画像処理による材料の変形パターン同定

東北大学 学生員 ○ 村上真也
 東北大学 正員 池田清宏
 東北大学 正員 寺田賢二郎

1. まえがき

砂の円柱供試体に、シェルの代表的な座屈モードであるダイヤモンドパターンが発生した例が報告されている。また岩やクリスタル等にはエシェロンモード（雁行状の周期的な亀裂）が発生することが知られている。池田等はこれらのパターンの発生，変化を対称性の階層的崩壊による多段階分岐現象として捉え，群論的分岐理論¹⁾によりその基礎メカニズムを解明している。

そこで本研究では，金属材料の塑性縞の写真をもとに分岐解析を行い，ストライプパターンから2次分岐してエシェロンモードが発生するという，池田等の理論^{1), 2)}の妥当性を検証する。

2. 分岐理論の概要

領域の境界の影響を除くために，長方形領域の両端は周期的な境界とし，滑らかにつながっていると仮定する。この場合の分岐構造に関しては水木がFourier級数項を用いて以下のように求めている。

a) 主経路からの分岐解

主経路上の4重分岐点からは，以下の2種類のパターンの方向に分岐が存在する。

ダイヤモンドパターン ($DI_{n\tilde{n}}$)

$$w = A_{n\tilde{n}} \cos\left(\frac{2\pi nx}{L_x}\right) \cos\left(\frac{2\pi \tilde{n}y}{L_y}\right) \quad (1)$$

$$w = B_{n\tilde{n}} \sin\left(\frac{2\pi nx}{L_x}\right) \sin\left(\frac{2\pi \tilde{n}y}{L_y}\right) \quad (2)$$

ストライプパターン ($OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$)

$$w = A_{n\tilde{n}} \cos\left(2\pi\left(n\frac{x}{L_x} \pm \tilde{n}\frac{y}{L_y}\right)\right) \quad (3)$$

$OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$ は，図1(a)に示したように，一定の周期の平行な波である。

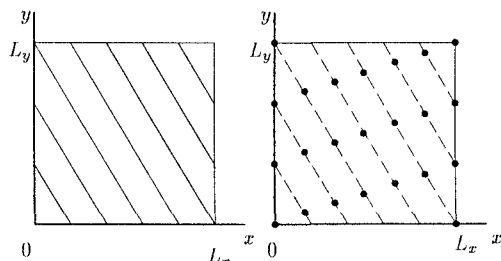
b) ストライプパターン $OB_{m\tilde{m}}^{\pm}$ 不変経路からの分岐解

$OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$ 不変経路からの分岐解には，以下の2種類の分岐経路が存在する。

ストライプパターン ($OB_{m\tilde{m}}^{\pm}$)

$$w = \sum A_{m\tilde{m}} \cos\left(2\pi\left(m\frac{x}{L_x} \pm \tilde{m}\frac{y}{L_y}\right)\right) \quad (4)$$

ここで $m, \tilde{m}$ は $n/m = \tilde{n}/\tilde{m} \geq 2$ を満たす整数である。



(a) ストライプパターン (b) エシェロンモード

図1 $C_{\infty} \times \tilde{C}_{\infty}$ 同変系の代表的な分岐モードの模式図

エシェロンモード ($EC_{n\tilde{n}kl}^{\pm}$)

$$w = \sum A_{m\tilde{m}} \cos\left(2\pi\left(m\frac{x}{L_x} \pm \tilde{m}\frac{y}{L_y}\right)\right) \quad (5)$$

$EC_{n\tilde{n}kl}^{\pm}$ は，図1(b)に示したように，ある規則で不動点が現れるモードである。

但し， m と $\tilde{m}$ は n と $\tilde{n}$ が互いに素である場合，

$$m\tilde{n} \mp \tilde{m}n = jk, \quad j = 1, 2, \dots \quad (6)$$

を満たす整数である。

ここで， k は $L_x \times L_y$ 領域における主経路との交点数を指しており， n と $\tilde{n}$ の最大公約数を d とした時， l は $0 \leq l \leq d-1$ を満足する整数である。

図1(b)に示したエシェロンモード $EC_{n\tilde{n}kl}^{\pm}$ の模式図は図1(a)のストライプパターン $OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$ 不変経路上の2重分岐点から分岐する。

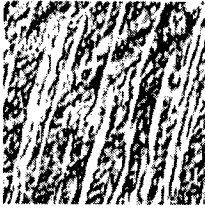
3. 画像解析

せん断帯の写真をスキャナーで読みとり，色の濃淡から z 方向の変位 w を得る。その変位を2重Fourier変換し，第2章の理論に基づき分析する。

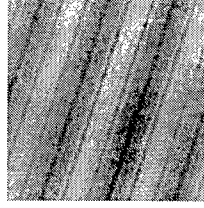
解析結果の一例として図2(a)に示す金属の塑性縞の解析例を挙げる。

(1) ストライプパターンの発生

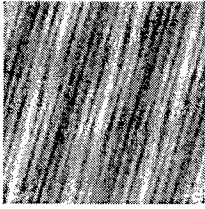
この画像の z 方向変位 $w(x, y)$ を2重Fourier変換した。その結果， $\cos(3x - y)$ の項が最も卓越していたため，これに相当する $OB_{31}^{\pm}$ の対称性を持った分岐が発生したと仮定した。



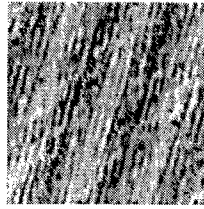
(a) 入力データ



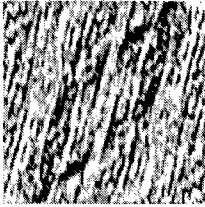
(b) 主経路 + OB_{31}^{-}



(c) (b) + ($k = 5$)



(d) (b) + ($k = 5i$)



(e) (b) + ($k = i$)

図 2 画像展開

(2) ストライプパターンのモードインタラクション

上記の $(n, \tilde{n}) = (3, 1)$ 波の整数倍の波数 $(n, \tilde{n}) = (6, 2) = (9, 3) \dots$ を持った波も同様に, OB_{31} の対称性を持つので, モードインタラクションを起こし波形を乱して図 2(b) の画像になる.

(3) エシェロンモードの発生

この OB_{31} 不変経路上の 2 重分岐点からエシェロンモード $EC_{31kl}^{\mp}$ の対称性を持った分岐解が枝分かれする.

OB_{31} 波が発生した後, 残りの $OB_{n\tilde{n}}$ 波の中で 2 番目に大きい Fourier 級数項は, $(m, \tilde{m}) = (23, 6)$ であり, この波は $k = 5$ に相当するので, $EC_{3150}^{\mp}$ 不変な分岐が発生したものと仮定した. 図 2(c) を見ると, 白く卓越している部分が 5 箇所あることが見て取れる. これは, $k = 5$ に相当する波が発生したことを裏付けている.

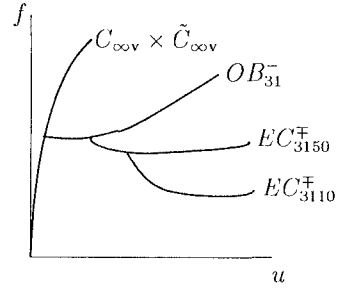


図 3 本研究の分岐模式図

(4) エシェロンモードのモードインタラクション

$k = 5$ に相当する波が発生した後, モードインタラクションによって, 5 の整数倍の k , つまり $k = 10, 15, \dots$ に相当する波が発生したと考えられ, 図 2(d) の様にパターンが現れる.

(5) モードインタラクションからの分岐

今回のケースのように最初の k が素数だった場合は, 5 との最大公約数を 1 にするような k の波 $k = 1, 2, 3, 4, 6, \dots$ が新たに現れる. すなわち, この段階ですべての k の波が現れたことになる.

また別に, 最初の k が素数でなかった場合には, その約数のうち 2 番目に大きい値の k の波になる. 例えば, 最初の k が 16 だったら, 次に $k = 8$ が現れ, $k = 4$ が現れ, $k = 2$ が現れ, 最後にすべての k が現れる. 以上のようにして, $OB_{n\tilde{n}}^{\pm}$ 不変経路上の 2 重分岐点から, ある一定の規則に従って波が乱れてゆき, 最後はエシェロンモード $EC_{n\tilde{n}kl}^{\pm}$ の対称性を持った分岐解が枝分かれした事を図 2(e) から確認できた. 以上の結果を関係模式図 3 にまとめた.

4. 考察

図中の記号 $C_{\infty v} \times \tilde{C}_{\infty v}$ は, 均質な自明解を表しており, まずここから第 3 章の (2) で示したストライプパターンが分岐している. その後, 2 回の分岐を経て波形を乱しながら, エシェロンモード $EC_{3110}^{\mp}$ に到達する.

5. 結論

本研究では, 水木が Fourier 級数項を用いて求めた多段階の分岐現象を, 画像解析の方面から検証できた. しかし, 現段階では当然の事ながら, 解析結果は解析領域によって変化する. 今後の課題は, 任意の領域設定において唯一の解析結果を得ることを可能にし, 本解析に客観性を持たせることである.

参考文献

- 1) Ikeda, K., Nakazawa, M. and Mizuki, A.: Bifurcation pattern simulation of a rectangular domain with periodic boundaries *Int. J. Solids Structures*, Vol.44A, 1994.
- 2) Ikeda, K., Murota, K. and Nakano, M.: Echelon modes in uniform materials. *Int. J. Solids Structures* 31, 2709–2733, 1994.