I −11

# 非平衡熱力学による関連及び非関連流動則の考察

東北大学工学研究科　正員　新関　茂

## １．まえがき

金属塑性論の分野では，降伏曲面と塑性ポテンシャル曲面を表す関数が異なる非関連流動則についても，ごく簡単に言及している文献[1]もあるが，一般に，この両者が一致する関連流動則が用いられている。このような状況にあるのは，最大塑性仕事原理が非関連流動則の存在を許容しないこと及び von Mises の降伏条件と Reuss の式の整合性にあると考えられる。しかしながら，土質力学の分野では，1960 年代の中頃より，非関連流動則が頻繁に用いられるようになり，その後どちらの流動則を用いるかは，研究者によってまちまちで[2]，今日まで両者の流動則が混在した混乱状態となっている。先に，述べたように，最大塑性仕事原理は非関連流動則を許容しないため，非関連流動則を用いてる研究者は，この原理は金属材料をに対して導かれたものであり，土のような材料にこの原理を用いるのは適当でないとしている。関連流動則に比べて，非関連流動則は，降伏曲面と塑性ポテンシャル曲面を表す関数が異なるため，その分だけ構成式に多くの情報を取り込めるので，実験データに合わせやすい面もある。しかし，非関連流動則を用いると応力増分とひずみ増分を関係ずける４階のテンソルが非対称となり，この関係式を用いた数値解析では，解が不安定になるなど好ましくない点もある。

本文は，非平衡熱力学と関数の偏微分に関する定理を用いて，応力増分とひずみ増分を関係ずける４階のテンソルの対称性及び非対称性について考察したものである。

## ２．非平衡熱力学の基礎[3,4,5]

デカルト座標系$x_i (i=1,2,3)$の Euler 表示を用いて，$\rho$，$v_i$，$e$，$\hat{f}_i$，$\hat{t}_i$，$q_i$を，それぞれ，密度，速度ベクトル，単位質量あたりの内部エネルギー，物体力，表面力，熱流速とすれば，熱力学第１法則は

$$\dot{K}+\dot{E}=W+Q \tag{1}$$

ここに　$K=\dfrac{1}{2}\int_V \rho v_i v_i dv$ (2),　　$E=\int_V \rho e\, dv$ (3),　　$W=\int_V \hat{f}_i v_i dv+\int_{\partial V}\hat{t}_i v_i dv$ (4)

$Q=\int_{\partial V} q_i n_i ds$ (5),　　$v_i=\dot{x}_i=\dfrac{Dx_i}{Dt}, etc.$ (6)

式(2)～(5)を式(1)に代入し，質量保存の法則(7) と Euler 運動方程式(8)

$$\dot{\rho}+\rho v_{i,i}=0 \tag{7}$$

$$\sigma_{ij,j}+\hat{f}_i=\rho\dot{v}_i \tag{8}$$

を用いれば，次の熱力学第１法則の局所形式となる。

$$\rho\dot{e}=\sigma_{ij}d_{ij}+q_{i,j} \tag{9}$$

ここに

$$d_{ij}=(v_{i,j}+v_{j,i})/2 \tag{10}$$

$\sigma_{ij}$は応力テンソルである。全比エントロピー（単位質量当たりの全エントロピー）の変化率$\dot{S}$は，非可逆的変形と熱の移動によって生じるエントロピー成生率${}_i\dot{S}$（熱力学第２法則により常に正）と物体への熱の流入又は流出によるエントロピー流れ${}_e\dot{S}$の和とであるから，$\theta$を絶対温度として

$$\dot{S}={}_i\dot{S}+{}_e\dot{S} \tag{11}$$

ここに

$$\rho\,{}_e\dot{S}=(q_i/\theta)_{,i} \tag{12}$$

また，熱量の移動に伴って生じるエントロピー成生率は$(q_i\theta_{,i})/\theta^2$である。応力テンソル$\sigma_{ij}$と変形速度テンソル$d_{ij}$を可逆的部分${}_E\sigma_{ij}$，${}_E d_{ij}$（弾性的変形に対応）と非可逆的部分${}_D\sigma_{ij}$（粘弾性的効果に対応），${}_D d_{ij}$（塑性的変形に対応）の和として表現すれば

$$\sigma_{ij}={}_E\sigma_{ij}+{}_D\sigma_{ij} \tag{13}$$

$$d_{ij} = {}_E d_{ij} + {}_D d_{ij} \tag{14}$$

したがって，散逸エネルギー速度は，全仕事から可逆的仕事を除いて次式で与えられる。

$$\hat{\sigma} = \sigma_{ij} d_{ij} - {}_E\sigma_{ij}\, {}_E d_{ij} \tag{15}$$

熱力学における定義により，流入および流出する熱量（熱流速$q_{i,i}$）及び上式の非可逆的仕事$\hat{\sigma}$を絶対温度$\theta$で除したものは全てエントロピーであるから，全エントロピーの釣り合い式は

$$\rho\theta\dot{S} = \hat{\sigma} + q_{i,j} \tag{16}$$

式（9）と式(16)より次式を得る。

$$\rho\dot{e} = \rho\theta\dot{S} + \sigma_{ij} d_{ij} - \hat{\sigma} \tag{17}$$

## ３．関連及び非関連流動則の考察

全比エントロピー変化率$\dot{S}$を力学的な散逸エネルギーと熱流速に関する部分に分割して

$$\dot{S} = {}_m\dot{S} + {}_h\dot{S} \tag{18}$$

ここに

$$\rho_m\dot{S} = \hat{\sigma}/\theta\,,\quad \rho_h\dot{S} = q_{i,i}/\theta \tag{19}$$

$d_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$と置き換えて，式(17)，(18)，(19)より

$$\rho\dot{e} = \rho\theta_h\dot{S} + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \tag{20}$$

両辺に，$dt$を掛け，$\dot{e}dt = de$，$d_hS = \dot{S}dt$，$\dot{\varepsilon}_{ij}dt = d\varepsilon_{ij}$とおきかえれば

$$\rho\, de = \rho\,\theta\, d_hS + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \tag{21}$$

上式は，$\rho e$が${}_hS$と$\varepsilon_{ij}$の関数であることを表しているから，　$\rho e$を時間$t$で微分し，質量保存の法則(7)を用いて，上式と同様な置き換えをすれば

$$\rho\, de = \frac{\partial(\rho e)}{\partial_h S} d_hS + \frac{\partial(\rho e)}{\partial\varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} \tag{22}$$

${}_hS$と$\varepsilon_{ij}$は独立であるから，式（21）と(22)より

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial_h S} = \rho\theta\,,\qquad \frac{\partial(\rho e)}{\partial\varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \tag{23}$$

上式の第２式より

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}\, d\sigma_{kl} \tag{24}$$

ここに，

$$D_{ijkl} = \frac{\partial^2(\rho e)}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}} \tag{25}$$

したがって，$D_{ijkl} = D_{klij}$，又は$D_{ijkl} \neq D_{klij}$かは，$\varepsilon_{ij}$と$\varepsilon_{kl}$による$\rho e$の偏微分の順番が交換可能かどうかによることになる。Schwarz-Thomé の定理 [6] によれば，$\partial(\rho e)/\partial\varepsilon_{ij}$，$\partial(\rho e)/\partial\varepsilon_{kl}$，$\partial^2(\rho e)/(\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl})$が存在し，$\varepsilon_{ij}$が構成する空間内の点$(\varepsilon_{ij},\ \varepsilon_{kl})$で、$\partial^2(\rho e)/(\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl})$が連続ならば、$D_{ijkl} = D_{klij}$が成り立つことになる。微小変形の場合に単純化して考えれば，上記の議論中の$\varepsilon_{ij}$はひずみテンソルとなるので，ひずみの増加と共に増加していた応力が急に低下するような応力―ひずみ関係に角ができるような点では，$D_{ijkl} \neq D_{klij}$となることになる。一般に，不安定点の前後の変形は定性的性質が異なるので，$\partial^2(\rho e)/(\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl})$が連続にならない。したがって，上記の結果は安定性の概念とも一致していると考えられる。

**参考文献**

(1)カチャンノフ，Л. M.（大橋義夫 訳）：塑性理論の基礎，養賢堂，1980, pp.63-66，79-81
(2)松井　保，阿部信晴，弾塑性体理論と適用，土と基礎，Vol. 31, No. 11, 1983, pp.97-105
(3)Niiseki, S.　: Thermodynamical Variational Inequality in Nonequilibrium Processes and Application to Turbulent Flow Problem. Finite Element Flow Analysis, ed. by T. Kawai, University of Tokyo Press, 1982, pp. 237-244
(4)Coleman, B. D. : Thermodynamics of Materials with memory, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 17, 1964, pp.1-46
(5)妹尾学：不可逆過程の熱力学, 東京化学同人社，1983
(6)一松　信，他：新数学事典，大阪書籍，1989