

弾性多重散乱問題の一解析

東北大学大学院工学研究科 正員 北原 道弘

1. はじめに

超音波を利用してクラック等の散乱体の分布密度を推定したい場合、多重散乱効果を見捨てる散乱体間距離、逆に無視できない散乱体間距離の指標があれば便利である。ここでは、ボルン級数を基にした数値解析によりクラック間の多重散乱効果に関する検討を行う。

2. クラックによる多重散乱問題と積分方程式

図-1に示すように、弾性母材内に存在する2個のクラックによる多重散乱問題を考える。図中、 S_{C1} と S_{C2} が2つのクラックの表面、 u^{IN} は入射波、 u^{SC} は散乱波である。いま、散乱波は全変位場 u のうち入射波以外の全ての波動成分 $u^S = u - u^I$ と定義すると、この散乱波は全体座標系 $(\bar{x}_i)$ において次のように積分表現できる。

$$u_k^{SC}(\mathbf{x}) = \int_{S_{C1}+S_{C2}} \Xi_{kmn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_n(\mathbf{y}) \Delta u_m(\mathbf{y}) dS_y, \quad \mathbf{x} \in D \quad (1)$$

ここに、 $\Delta u_m(\mathbf{y})$ はクラックの開口変位、 $n_n(\mathbf{y})$ はクラック面上の単位法線ベクトルである。また、 $\Xi_{kmn}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は U_{kp} を基本解として次のように表される応力に関する積分核である。

$$\Xi_{kmn}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C_{mnpq} \frac{\partial U_{pk}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_q} \quad (2)$$

いま、図-1に示すようなクラック S_{C1} に取り付けた座標系 (x_i) に移り、式(1)を基に場の点 $\mathbf{x} \in D$ における応力の表現を作成すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{SC}(\mathbf{x}) = & C_{ijkl} \int_{S_{C1}} \Xi_{km3,i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_m(\mathbf{y}) dS_y \\ & + C_{ijkl} \int_{S_{C2}} \Xi_{kmn,i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_n(\mathbf{y}) \Delta u_m(\mathbf{y}) dS_y \end{aligned} \quad \mathbf{x} \in D \quad (3)$$

クラック面 S_{C1} 上では応力が零であるから、散乱波による応力 σ_{ij}^{SC} は入射波による応力 σ_{ij}^{IN} により次のように表される。

$$n_i(\mathbf{x}) \sigma_{ij}^{SC}(\mathbf{x}) = -n_i(\mathbf{x}) \sigma_{ij}^{IN}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_{C1} \quad (4)$$

上式において、 S_{C1} 上で $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ である。

散乱波の積分表現(3)にクラック面上の境界条件(4)を直接適用すると、式(3)右辺第1項の超特異性のために後の数値解析に困難を来すことが予想される。そこで、ここでは散乱波の積分表現式(3)に含まれる開口変位に形状関数(後の数値解析では8接点2次)を導入し、式(3)右辺第1項の非積分関数に部分積分を適用して基本解の微分を形状関数の微分に変換することにより積分核の特異性を弱めることにする。この操作の後、式(3)中の場の点 $\mathbf{x}$ をクラック面 S_{C1} 上

に置いて境界条件(4)を適用すれば、与えられた入射波に対してクラックの開口変位を決めるための積分方程式の一つを得る。この段階でここで得た方程式を座標変換により全体座標系 $(\bar{x}_i)$ に戻す。全く同様の過程をクラック面 S_{C2} 上についても繰り返すことにより、与えられた入射波に対して複数のクラックの開口変位を決定する積分方程式系を作成することができる(具体的な表現は紙面の都合上省略)。

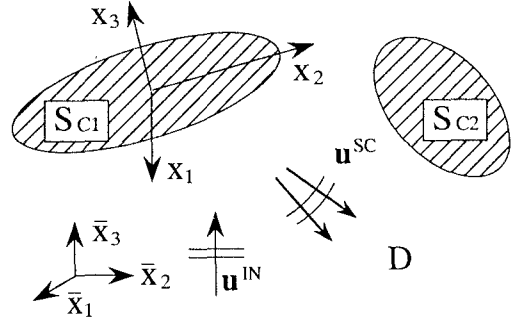


図-1 クラックによる多重散乱問題

3. ボルン級数による解法

図-1に示した2つのクラックによる散乱問題に対する積分方程式系は次のように整理できる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_1 \\ \Delta \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1^{IN} \\ \mathbf{f}_2^{IN} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ここで下付の指標1と2はそれぞれクラック表面 S_{C1} と S_{C2} 上の物理量であることを示している。また、基本解の積分から成る $\mathbf{K}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, 2)$ はクラック表面 $S_{C\beta}$ から $S_{C\alpha}$ への影響を表すマトリクスであり、 $\mathbf{f}_\alpha^{IN}$ は式(4)右辺で与えられた入射波による応力である。

いま、式(5)の係数マトリクスを対角成分と非対角成分に次のように分離する。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_1 \\ \Delta \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{12} \\ -\mathbf{K}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_1 \\ \Delta \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1^{IN} \\ \mathbf{f}_2^{IN} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

上式を簡単のため次のように書く。

$$\mathbf{A} \Delta \mathbf{u} - \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}^{IN} \quad (7)$$

ここで $\mathbf{A}$ は単独のクラック面上の影響を、 $\mathbf{B}$ はそれぞれのクラック間の相互作用を表す次のようなマトリクスである。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{12} \\ -\mathbf{K}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (8)$$

いま $\mathbf{A}^{-1}$ を式(7)の両辺に作用させて

$$(\mathbf{I} - \mathbf{C}) \Delta \mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f}^{IN} \quad (9)$$

を得る。ここで C は次のようである。

$$C = A^{-1}B = \begin{bmatrix} K_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & K_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -K_{12} \\ -K_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

式(9)の解は次のように書ける。

$$\Delta u = (I - C)^{-1} A^{-1} f^{IN} = \sum_{k=0}^{\infty} C^k A^{-1} f^{IN} \quad (11)$$

いま、上式(11)の第0次項を次のように置く。

$$\Delta u_0 = A^{-1} f^{IN} \quad (12)$$

このとき、解(11)は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= \Delta u_0 + C \Delta u_0 \\ \Delta u_2 &= \Delta u_0 + C \Delta u_1 = \Delta u_0 + C \Delta u_0 + C^2 \Delta u_0 \\ &\vdots \\ \Delta u_n &= \Delta u_0 + C \Delta u_{n-1} = \sum_{k=0}^n C^k \Delta u_0 \end{aligned} \quad (13)$$

上記表現において、式(12)に示した第0次項 Δu_0 はクラック間の相互作用を無視したボルン近似に相当する。式(13)の各項 $C^k \Delta u_0$ は図-2の意味における散乱体間の k 次の相互作用を表しており、各相互作用の和として解を近似した級数(13)は第0次項をボルン近似とするボルン級数と呼べる。この級数の収束条件は

$$\|C\| = \frac{\|B\|}{\|A\|} < 1 \quad (14)$$

となるが、通常 $\|A\| \gg \|B\|$ であるから、この場合には級数(13)の収束は速いと予測できる。

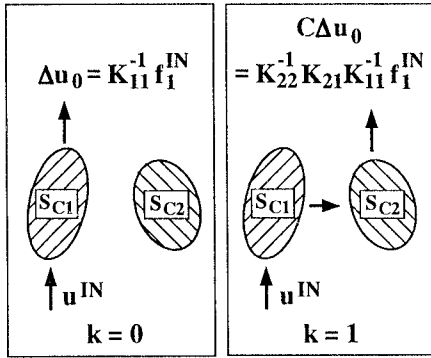


図-2 ボルン級数の各項 $C^k \Delta u_0 (k=0, 1)$

4. 解析例

解析は図-3に示す半径 a の2つの円形クラックについて行った。入射波は x_3 軸方向に伝播する平面縦波である。計算上着目した物理量は、散乱波が有するエネルギーを断面積の次元で表示した弾性散乱断面積 P である。図-4はクラックの幾何学的断面積 πa^2 で無次元化した散乱断面積を2個のクラック間の距離 d/a に対してプロットしたものである。黒丸が相互作用を考慮した本解析による結果、白丸は相互作用を無

視して1つのクラックによる結果を単純に2倍したものである。2つのクラック間の距離 d がクラックの直径程度 $2a$ になると、相互作用効果はかなり少なくなることがわかる。

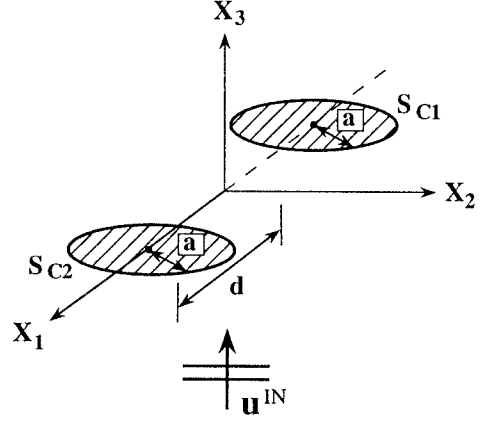


図-3 半径 a の2つの円形クラック

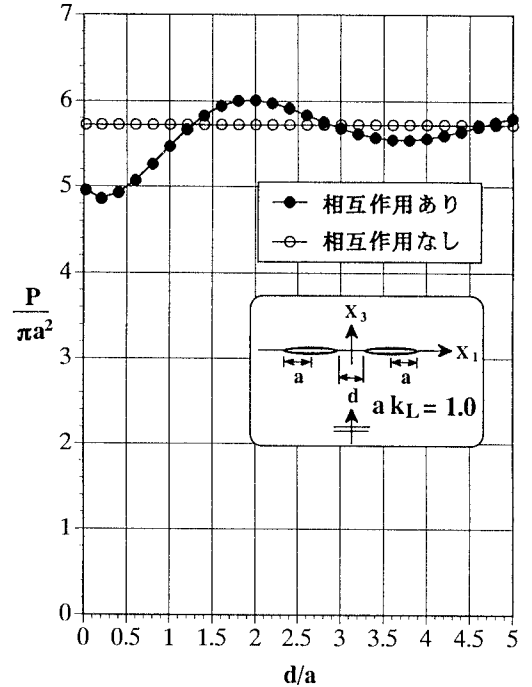


図-4 散乱断面積 ($ak_L = 1.0$)

5. おわりに

複数(2個)クラックによって散乱される散乱エネルギー量がクラック間距離の相違によってどの程度変動するかについて一例を示した。相互作用による多重散乱効果はクラックの配置形態や波数によっても異なると予想され、これらを含めた検討は今後の課題である。