

Ⅲ - 9

粒状体のパッキングに関する統計的考察

東北学院大学 学生会員 新田孔明

東北学院大学 正会員 佐武正雄

1. まえがき

粒状体では、パッキングの不均一性が力学性質の重要な要因である。本研究では、粒子パッキングの状態についてループテンソル・接続テンソルを用いて統計的解析を行う方法や修正ボロノイ分割による隣接粒子数の分布の解析について述べ考察を行う。

2. ループテンソル・接続テンソルの平均・分散

ループテンソルと接続テンソルは粒子パッキングの状態を示すもので、ループテンソルは一つの間隙を囲む枝ベクトルによって構成されるが、接続テンソルは1つの粒子から出ている枝ベクトルから構成される¹⁾。ループ・接続テンソルの平均・分散については次のように定義される。

$$L_{ij} = \langle l_{ij} \rangle = 1 / N_v \sum_V l_{ij} \quad (1)$$

L_{ij} は平均ループテンソル、 l_{ij} は一つのループ V のループテンソルを示している。
平均接続テンソル M_{ij} も粒子 P の接続テンソル M_{ij} によって同様の式で表わされる。

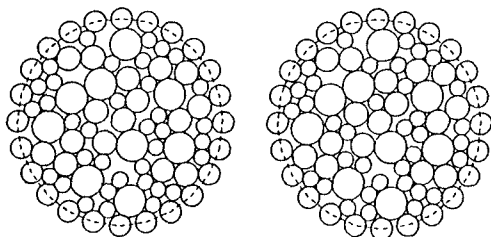
$$\lambda_{ik} = 1 / (N_v - 1) \sum_V (L_{ij} - \bar{L}_{ij})(L_{jk} - \bar{L}_{jk}) \quad (2)$$

$$\mu_{ik} = 1 / (N_p - 1) \sum_P (M_{ij} - \bar{M}_{ij})(M_{jk} - \bar{M}_{jk}) \quad (3)$$

N_v , N_p はそれぞれループ・粒子の総数で、 λ_{ij} , μ_{ij} はそれぞれ分散ループテンソル、分散接続テンソルと呼ばれる。

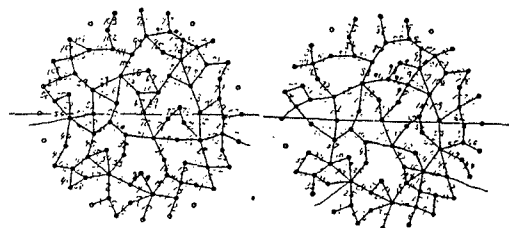
3. ループテンソル・接続テンソルによる解析例

具体例として、図-1 A・Bの粒子パッキング（岸野による粒状要素法のシミュレーション）について解析した。まず、図-2に示す粒子グラフを作り、それぞれについてループテンソルと接続テンソルの平均・分散を求めた。この結果を表-1に示す。ループテンソルの数値が接続テンソルより大きいのは関係する枝の数が一般に多いからである。A（初期状態）とB（載荷後）について、数値の変化は余り見られないが、Bの方が分散の数値がやや大きくなっていることが観察される。



A(初期状態)

B(載荷(二軸圧縮)後)

図-1 粒子パッキング($\phi = 12, 9, 8, 6$ [mm])

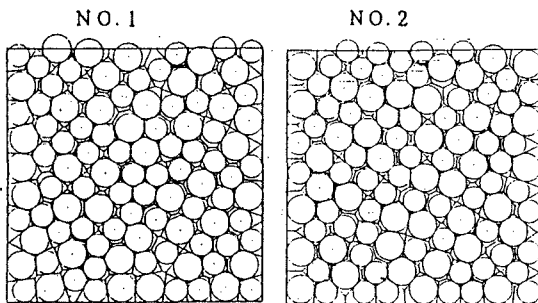
A

B

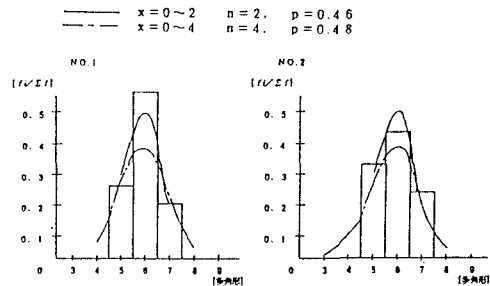
図-2 粒子グラフ

	平均		分散	
	A	B	A	B
ループ	$\begin{pmatrix} 0.8540 & 0.0665 \\ 0.0665 & 0.9256 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8230 & 0.0400 \\ 0.0400 & 0.9256 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1933 & 0.0220 \\ 0.0220 & 0.3169 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.2186 & 0.0293 \\ 0.0293 & 0.3241 \end{pmatrix}$
接触	$\begin{pmatrix} 0.5034 & 0.0199 \\ 0.0199 & 0.5861 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5125 & -0.0157 \\ -0.0157 & 0.5613 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1502 & -0.0014 \\ -0.0014 & 0.1450 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.1508 & -0.0037 \\ -0.0037 & 0.1672 \end{pmatrix}$

表一 ループテンソルと接触テンソルの平均・分散



図一 粒子パッキングと修正ボロノイ分割



図一 2項分布

4. 修正ボロノイ分割による解析

修正ボロノイ分割は、円粒子パッキングにおける修正グラフ(粒子グラフに仮枝を加えたもの)の双対グラフとして得られるもので、図一3に示すように1つの粒子がもつ領域を示すものである(等径粒子のパッキングの場合は、通常のボロノイ分割に帰着する)。修正ボロノイ分割は、1つの粒子がいくつの粒子に囲まれているかやその中でも粒子同士が接触しているものとそうでないものがあるかなどを調べるために用いることができる。次に、一つの粒子に隣接する粒子数は、修正ボロノイ分割に現われる多角形の辺数となるので、その分布について二項分布を当てはめて解析する。

二項分布は、統計学でしばしば使われる離散型の確率分布の1つで、(4)で与えられる。

$$f(x) = {}_n C_x p^x q^{(n-x)} \quad q = 1 - p \quad (4)$$

n, p : 定数

具体例として、一辺18cmの正方形に $\phi 20 : \phi 16$ の粒子を 16 : 25 の比に配合した粒子パッキングについて修正ボロノイ分割を行い(図一3 NO.1・2)、2項分布の当てはめを行い、その結果を図一4に示した。この結果から、接触粒子数の分布が二項分布によって表わされることが分かったので、今後は配合の状態や粒状体の変形過程における変化の考察などに活用していきたい。

6. あとがき

本研究では、粒子パッキングについて、ループテンソル・接触テンソルによる統計的解析、修正ボロノイ分割による領域多角形の辺数の分布に二項分布を応用する手法を説明した。今後の課題として粒状体の変形過程にこれらの解析を適用して粒状体の力学性質を調べる研究を進めたい。

参考文献

- 1) 安保祥成、佐武正雄：ループ及び接触テンソルによる粒状体パッキングによる解析、土木学会東北支部技術研究発表会講演概要、1995、pp400~401