

II - 12

山地河川の縦断形状について

—土砂輸送の卓越する河川と浸食の卓越する河川—

東北大学工学部 学生員 ○山口里実
東北大学大学院 正 員 泉 典洋

1. はじめに

河川の縦断形がどのような形状をしているのか、また、どのように変化していくのか、といった問題は理学、工学の両分野で古くから興味の対象となってきた。本研究では山地領域を対象として、空間的・時間的により大きいスケールでの河道縦断形状について簡単な表式を用いた理論解析を行い、土砂輸送の卓越する河川と浸食の卓越する河川における縦断形状の基本的特性の違いを明らかにする。

2. 土砂輸送の卓越する河川

2. 1 支配方程式

図-1に示すような山地領域における河川を考える。河道内の流れは次の一次元浅水方程式で表される。

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = -g \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} - g \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} - \frac{\bar{\tau}}{\rho h} \quad (1)$$

ここで $\bar{u}$ は $\bar{x}$ 方向の流速、 $\bar{h}$ は水深、 $\bar{\tau}$ は底面剪断力である。 $\bar{\tau} = \rho C_f \bar{u}^2$ (C_f :抵抗係数)を用い、問題を簡単にするため C_f は一定とする。流れの連続式は次式で表す。

$$\frac{\partial \bar{u} \bar{h} \bar{b}}{\partial \bar{x}} = I \quad (2)$$

ここで I は単位流路長当たりの流入量で定数とする。 $\bar{b}$ は川幅で一定とし $\bar{b} = B$ (B :定数)とする。また、土砂輸送が卓越する河川では、河床高の時間変化は主として砂礫の掃流作用によって決定され、次式で表される。

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t}} = -\frac{1}{1-\lambda_p} \left(\frac{\partial \bar{q}_s}{\partial \bar{x}} - \bar{\sigma} \right) + \bar{\varphi} \quad (3)$$

ここで λ_p は間隙率、 $\bar{\sigma}$ は単位流路長当たりの流入土砂量、 $\bar{\varphi}$ は隆起速度であり、 $\bar{\sigma}$ 及び $\bar{\varphi}$ は定数とする。 $\bar{q}_s$ は流砂量で、 $\bar{q}_s = \alpha [\bar{\tau} / (\rho R_s g D_s)]^{3/2}$ (R_s :砂の水中比重)を用いる。

下流端において境界条件として、次式が成立する。

$$\bar{x} = L \quad \text{のとき} \quad \bar{\eta} = 0 \quad (4)$$

2. 2 無次元化

次の無次元化を導入する。

$$\bar{u} = Uu, \quad \bar{h} = Dh, \quad \bar{\eta} = H\eta, \quad \bar{x} = Lx \quad (5a, b, c, d)$$

ここで U 及び D は代表的な流速及び水深であり、 $U = (I g H C_f^{-1} B^{-1})^{1/3}$, $D = (I^2 g^{-1} H^{-1} L^3 C_f B^{-2})^{1/3}$ と定

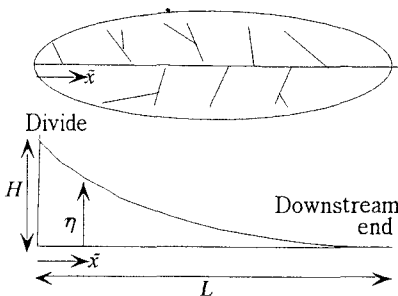


図-1 河床形状の概念図及び座標系

義する。式(1)を書き直すと次のようになる。

$$\varepsilon \left(U^2 u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) = -\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{u^2}{h} \quad (6)$$

ここで $\varepsilon = D/H$ である。現在考えているような山地領域の場合、 ε は十分小さいとみなしてよい。式(6)中で ε の1次以上の項を無視すると次の等流近似の式となる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{u^2}{h} \quad (7)$$

連続式(2)を無次元化し、上流端で流量が零という条件の下で積分すると次式が得られる。

$$uh = x \quad (8)$$

河床変動は、式(3)を無次元化した次式で表される。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t_i} = -\frac{\partial u^3}{\partial x} + \sigma + \varphi_i \quad (9)$$

ここで $t_i = T_i t$, $\bar{\sigma} = (1 - \lambda_p) H \sigma / T_i$, $\bar{\varphi} = H \varphi_i / T_i$,

$T_i = (\rho R_s g D_s / \rho C_f U^2)^{3/2} (1 - \lambda_p) H L / \alpha$ であり、 T_i は土砂輸送による地形変形の時間スケール、 φ_i は T_i を基準とした隆起速度である。式(7)、(8)及び(9)より次式を得る。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t_i} = \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \sigma + \varphi_i \quad (10)$$

境界条件は式(4)を無次元化して次のようになる。

$$x = 1 \quad \text{のとき} \quad \eta = 0 \quad (11)$$

2. 3 解

河床高 η を平衡状態での高さ $\bar{\eta}$ と、大洪水や山腹の崩壊等による供給土砂量の増大がもたらす平衡状態からのずれ η' に分けて書き表す。

$$\eta = \bar{\eta} + \eta' \quad (12)$$

平衡状態における河床縦断形状は、式(10)中で時間微分項を無視した式から求められ、境界条件(11)の下で積分すると次の解が得られる。

$$\bar{\eta} = (\sigma + \varphi_i)(1-x) \quad (13)$$

式(13)によれば、平衡状態において河床縦断形状は河床勾配が $\sigma + \varphi_i$ の直線となる。

平衡状態からのずれが、どのような挙動をとるのかは、式(10)、(12)及び(13)より得た次式から求められる。

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t_i} = \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \eta'}{\partial x} \right) \quad (14)$$

$x = 1$ で $\eta' = 0$, $x = 0$ で有界という境界条件の下、式

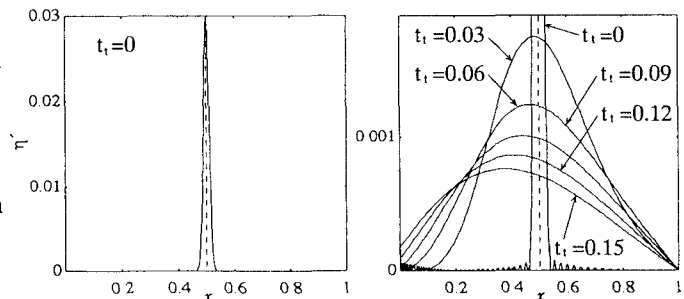


図-2 河道縦断形状の擾乱の挙動（土砂輸送の卓越する河川）

(14)を解くと次の解が得られる.

$$\eta' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot J_0(\lambda_n \sqrt{x}) \cdot e^{-\frac{1}{4}\lambda_n^2 t}; \quad (15,a,b)$$

$$a_n = \frac{1}{J_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 \eta'_0(x) \cdot J_0(\lambda_n \sqrt{x}) \cdot dx$$

J_0 及び J_1 は第一種Bessel関数で、 λ_m は $J_0(\lambda_m) = 0$ を満たし、また η'_0 は擾乱の初期形状である. 式(15)は、擾乱が指数関数的に減衰し、平衡状態に近づいていくことを表している. 図-2に $\eta'_0(x) = 0.03e^{-5000(x-0.5)^2}$ とした場合の擾乱の挙動を示す.

3. 侵食の卓越する河川

3. 1 支配方程式

河道内の流れ及び連続式は式(1)及び(2)で表す. ここでは $\bar{\tau} = \rho g n^2 \bar{u}^2 h^{-1/3}$ を用い、マニングの粗度係数 n は一定とする. また、河床が粘性土で構成された水路では川幅は水深のほぼ4倍となる、という澤井¹⁾の理論がこの場合も適用されるとし、 $b = 4h$ と仮定する.

侵食の卓越する河川では、河床高の時間変化は次のように表される.

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} = -\bar{E} + \bar{\varphi} \quad (16)$$

ここで $\bar{E}$ は基盤岩の侵食速度で $\bar{E} = \beta(\bar{\tau}/\bar{\tau}_c)^\gamma$ ($\bar{\tau}$:基準となる底面剪断力)とする. γ については後述する.

境界条件は式(4)を用いる.

3. 2 無次元化

2.2と同様に式(5)の無次元化を導入する. 式(1), (2)及び(16)より得られる式を式(17), (18)及び(19)に示す.

$$\text{ここでは } U = 0.71n^{-3/4}I^{1/4}H^{3/8}L^{-1/8}, \quad D = 0.59n^{3/8}I^{3/8}H^{-3/16}L^{9/16} \text{ と定義した.}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{u^2}{h^{4/3}} \quad (17)$$

$$uh^2 = x \quad (18)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t_e} = -\left(u^2 h^{-1/3}\right)^\gamma + \varphi_e \quad (19)$$

ここで $\bar{t} = T_e t$, $\bar{\varphi} = (H/T_e)\varphi_e$, $T_e = H/\beta$, $\bar{\tau}_c = \rho g n^2 U^2 D^{-1/3}$ であり、 T_e は侵食による地形変化の時間スケール、 φ_e は T_e を基準とした隆起速度である.

式(17), (18)及び(19)を用いて次式が得られる.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t_e} = -x^{3\gamma/8} \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^{13\gamma/16} + \varphi_e \quad (20)$$

上式を解くための境界条件は式(11)を用いる.

3. 3 解

式(20)は $\gamma = 16/13$ の時だけ線形となる. ここでは簡単化のためこの値を用いる. 粘性性材料の場合 $\gamma = 0.5 \sim 3$ となることを考慮すれば、無理な仮定ではない. 境界条件(11)の下で式(20)の解は次の得られる.

$$\eta = \eta_h + \eta_n;$$

$$\begin{cases} \eta_h = f\left(\frac{13}{7}x^{7/13} + t_e\right) \\ \eta_n = \begin{cases} \varphi_e t_e, & 0 \leq x \leq \left(1 - \frac{7}{13}t_e\right)^{13/7} \\ \frac{13}{7}\varphi_e \left(1 - x^{7/13}\right), & \left(1 - \frac{7}{13}t_e\right)^{13/7} \leq x \leq 1 \end{cases} \end{cases} \quad (21)$$

ここで η_h は斉次解、 η_n は非斉次解である. f は任意の関数で初期条件によって決定され、例えば初期条件 $\eta(x, 0) = \eta_0(x)$ が与えられた時の f は次式で表される.

$$f\left(\frac{13}{7}x^{7/13} + t_e\right) = \eta_0\left[\left(\frac{7}{13}\frac{13}{7}x^{7/13} + t_e\right)\right]^{13/7} \quad (22)$$

図-3では、得られた解に初期条件 η_0 及び隆起速度 φ_e をそれぞれ与えた. 図-3a,b,cによると、 $t = 13/7$ 以降 $\eta = \frac{13}{7}\varphi_e(1 - x^{7/13})$ の曲線となり、これが平衡形状となることがわかる. 侵食の卓越する河川における擾乱とは、間欠的な隆起によって生じる遷急点などであるが、図-3d,eに示されるように、下流端に発生した遷急点は時間とともに $\eta = \frac{13}{7}\varphi_e(1 - x^{7/13})$ の曲線上を形を変えずに上流に向かって進んでいくことがわかる.

4. おわりに

本研究では、山地河川に関する基本的性質の理解のために、非常に簡略化した方程式群を用いて理論解析を行い、土砂輸送が卓越する河川と浸食が卓越する河川の縦断形状の基本的特性の違いを明らかにした. その結果、土砂輸送の卓越する河川では擾乱は指数関数的に激減し平衡形状は安定であることが示された. また、侵食の卓越する河川では土砂輸送の卓越する河川と異なり、与えられた擾乱は上流に伝搬していくことが理論的に示された.

参考文献

1) 澤井健二・芦田和男: 粘性性流路の侵食と横断形状に関する研究, 土木学会論文集, 第266号, 1977.

