

有限回転を許容する空間骨組の一動的数値解析法

東北大学工学部 ○学生員 齊木 功
東北大学工学部 正 員 岩熊 哲夫

1. まえがき

三次元空間において大回転を伴う棒部材の有限要素動的解析手法は多数発表されている。その多くは微小変位理論による有限要素法を拡張したものであるが、要素の運動の記述に空間固定の座標系を用いるものと、要素と共に移動する座標系を用いるものとに大別される。Simo and Vu-Quoc¹⁾は変位やひずみを固定座標系で表しており、慣性項は簡潔に記述しているが、ひずみや構成関係に有限回転の影響を含むため内力項は複雑になる。一方、移動座標系では内力項は簡単になるが、慣性項が複雑になる。ところがエネルギーは不変量であり、いかなる座標系で表してもよいので、慣性項と内力項をそれぞれ都合のよい座標系で考えれば効率のよい定式化が可能である。

通常、二つの座標系どうしの座標変換則は、Euler 角などの座標変換則に従わない非ベクトル量である有限回転角によって定義されるが、ここでは物理的観点から、座標変換を基底ベクトル同士の内積と考え、移動する局所座標系の基底ベクトルの剛体回転運動を追跡することによって記述することとした。

2. 運動方程式

(1) 座標変換

空間固定の全体座標系の基底ベクトルを e_I とし、図-1にあるような梁の断面に埋め込まれた局所基底ベクトル $\bar{e}_j$ を定義すると、

$$T_{Ij} \equiv e_I \cdot \bar{e}_j \quad \dots\dots\dots (1)$$

で定められる T_{Ij} は局所基底ベクトル $\bar{e}_j$ の全体系での成分を表すと同時に、局所系と全体系の座標変換則を表している。局所基底ベクトル $\bar{e}_i$ が角速度 ω で回転しているとき、その運動は、

$$\dot{\bar{e}}_i = \omega \times \bar{e}_i \quad \dots\dots\dots (2)$$

により記述できる。ただし、上付きドットは時間微分を表す。局所系成分をマトリクス表示して書けば、

$$[\dot{T}_{Ij}] = [T_{Ij}] \begin{bmatrix} 0 & -\bar{\omega}_3 & \bar{\omega}_2 \\ \bar{\omega}_3 & 0 & -\bar{\omega}_1 \\ -\bar{\omega}_2 & \bar{\omega}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3)$$

と表すこともできる。

(2) 剛性項

変位勾配が、極分解の定理によって回転とのびに分解されるように、梁の有限要素における任意の点の変位は、剛体移動および剛体回転による変位と、内力の発生に寄与する実質的な変形による変位とに分けることができる。従って、通常、微小ひずみが成立する限り、要素をある程度小さくすれば要素内の変形量を小さくできるため、実質的な変形に関しては線形理論の剛性行列が使える²⁾。

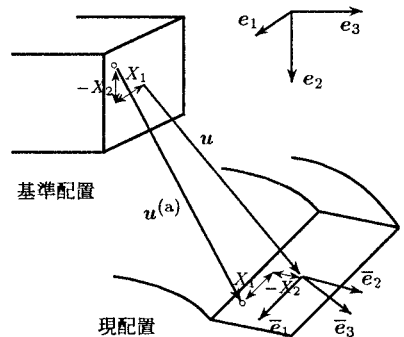


図-1 梁の変位場

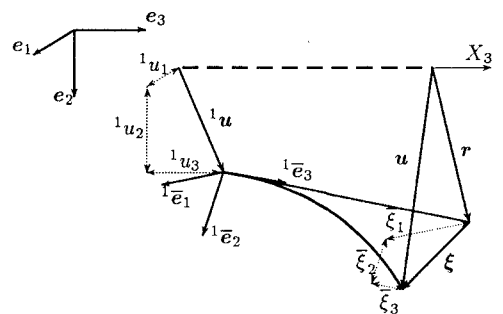


図-2 極分解の定理に基づく剛体変位の除去

(3) 慣性項と運動方程式

梁の任意点の変位を $u^{(a)}$ とすると、慣性仮想仕事 δW は、

$$\delta W = \int_V \rho \delta u^{(a)} \cdot \ddot{u}^{(a)} dV \dots\dots\dots (4)$$

と定義できる。ここに、 ρ は材料の密度である。図-1 にあるような Bernoulli-Euler 梁の変位場を用いて、梁の任意点の変位 $u^{(a)}$ は中立軸の変位 u により、

$$u^{(a)} = u + X_1(\bar{e}_1 - e_1) + X_2(\bar{e}_2 - e_2) \dots\dots\dots (5)$$

と表される。局所基底ベクトル $\bar{e}_i$ の変分が、仮想回転 $\delta\theta$ により、

$$\delta\bar{e}_i = \delta\theta \times \bar{e}_i \dots\dots\dots (6)$$

と表されることを考慮すれば、仮想変位 $\delta u^{(a)}$ は、

$$\delta u^{(a)} = \delta u + X_1 \delta\theta \times \bar{e}_1 + X_2 \delta\theta \times \bar{e}_2 \dots\dots\dots (7)$$

と書ける。ここで図-2 にあるように、剛体変位除去の手法に従い中立軸の変位を、

$$u = r + \xi \dots\dots\dots (8)$$

のように、剛体変位 r と実質的な変形 ξ とに分解する。剛体変位 r は、節点 1 の変位 1u と節点 1 の回転によって生じる変位であり、節点 1 の局所基底ベクトルを ${}^1\bar{e}_i$ とすると、次のように表される。

$$r = {}^1u + X_3({}^1\bar{e}_3 - e_3) \dots\dots\dots (9)$$

局所基底ベクトルについても、

$$\bar{e}_i = \theta \times {}^1\bar{e}_i \dots\dots\dots (10)$$

のように、節点 1 の局所基底ベクトルと実質変形による微小回転 θ とに分解する。要素内の変位は小さくできるので、幾何学的考察から、

$$\bar{\theta}_1 = -\bar{\xi}'_2, \quad \bar{\theta}_2 = \bar{\xi}'_1 \dots\dots\dots (11)$$

となることを考慮し、式 (5), (7), (8), (9), (10) を式 (4) に代入し、実質変形の局所成分 $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$ に 3 次の、 $\bar{\xi}_3, \bar{\theta}_3$ に 1 次の線形の梁理論で用いられる変位関数を与え、剛性項、外力項を加えると離散化された運動方程式が得られる。

3. 数値解析例

二階の非線形連立常微分方程式である運動方程式を一階の連立微分方程式に変換し、Runge-Kutta 法を用いて、図-3にあるような集中荷重を受ける両端自由の梁¹⁾を解析した。図-4 のように大回転・大変形を伴う梁の挙動が得られ、異なるアプローチを用いた Simo and Vu-Quoc と同様の結果となった。

4. おわりに

物理量によって定義された座標変換則を提案し、大回転を伴う骨組の動的応答の簡便な数値解析法を示した。今後、収束性や精度の確認をするには要素数の増加が必要であるが、それに伴い Runge-Kutta 法による積分の安定条件が厳しくなるので、そのための積分法の改善も課題である。

参考文献

- 1) J. C. Simo and L. Vu-Quoc: ON the dynamics in space of rods undergoing large motions — A geometrically exact approach, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., vol.66, pp.125-161, 1988
- 2) Y. Goto et al.: Analysis of Greenhill problem by a co-rotational method, J. of Struc. Eng., Vol.41A, pp.411-420, 1995

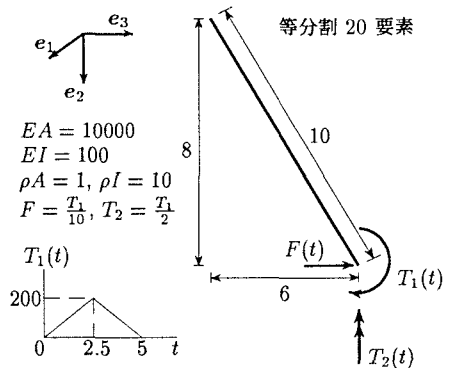


図-3 両端自由の柔な梁

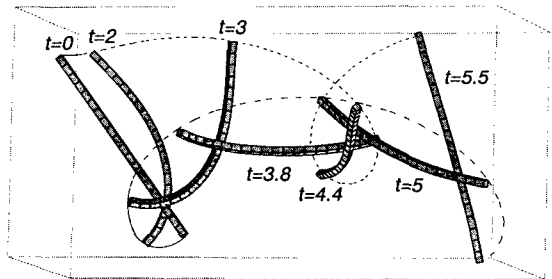


図-4 両端自由の柔な梁の解析結果