I －31

ハイブリッド/混合有限要素法による板の固有振動解析

岩手大学工学部　○学生員　段　梅
岩手大学工学部　正　員　宮本　裕
岩手大学工学部　正　員　岩崎　正二
岩手大学工学部　正　員　出戸　秀明

1. まえがき

有限要素法は偏微分方程式系を数値的に解くための一つの強力な方法である。有限要素法の出現によって数値的に解決できる問題の範囲が非常に拡大された。しかし、この方法はまだ完成された手法とは言いがたく、実用に際しては種々の問題が残されている。変位型有限要素法の欠点を改良するために、ハイブリッド / 混合有限要素法 (HMFEM) は1982年米国の航空宇宙学科の Pian 教授によって提案された。この方法は板やシェルの曲げ問題、非線形問題などについて良好な結果を与えた。解の精度を高めるために、著者は最近アダプティブハイブリッド / 混合有限要素法による応力解析の研究を行っている[1-2]。本論文はハイブリッド / 混合有限要素法を平板の固有振動問題に応用したものである。

2. 解析理論

図 -1に板の曲げモーメントM_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}及び垂直方向のせん断力Q_x, Q_y の正の方向を示す。

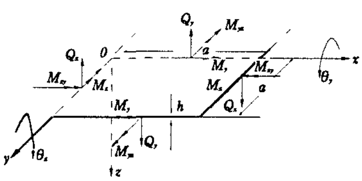

図 -1 板の変量の正方向

動的な釣り合い方程式： $D^{T}\sigma=\rho\ddot{u} \quad ((\sigma,u),t)\in V\times(t_1,\ t_2)$ (1)

ここで, D 、ρ 、u はそれぞれ微分マトリックス、密度、変位である。上式を板の Hellinger−Reissner 原理の汎関数に代入すると、平板振動問題に関するハイブリッド / 混合有限要素法の汎関数 (2) が導かれる。

$$\Pi_{R}(\sigma,u_q,u_\lambda)=\int_{t1}^{t2}\left(\int_{V^{(e)}}\left(-\frac{1}{2}\sigma^{T}s\sigma+\sigma^{T}(Du_q)-(D^{T}\sigma)u_\lambda\right)dV-\int_{S\sigma n}\overline{T}^{T}u_q ds+\int_{V^{(e)}}\frac{1}{2}\dot{u}^{T}\rho\dot{u}\,dV\right)dt \tag{2}$$

ここで、$\overline{T},\rho$ はそれぞれ表面力、速度である。u_q 、u_λ はそれぞれ適合変位、非適合変位を表す。

$$\sigma=\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix},\qquad u=u_\lambda+u_q,\qquad S=\frac{12}{Et^3}\begin{bmatrix} 1 & -v & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{t^2(1+v)}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{t^2(1+v)}{5} \end{bmatrix}$$

式 (2) において、変分を受ける独立関数に対してつぎのように仮定する。ただし、ω は円振動数を表す。

$$\sigma(x,\beta,t)=P(x)\beta\sin\omega t \quad u_q(x,q,t)=N(x)q\sin\omega t\ ,\ \ u_\phi(x,\phi,t)=Z(x)\phi\sin\omega t\ ,\ \ \overline{T}(t)=T_e\cos\omega t \tag{3}$$

式 (3) を式 (2) に代入すれば、次のような式が得られる。

$$\Pi_{RS}=\frac{1}{\omega}\left[-\frac{1}{2}\beta^{T}H\beta+\beta^{T}Gq-\beta^{T}R\phi+\frac{\omega^2}{2}q^{T}W_1q+\frac{\omega^2}{2}q^{T}W_2q\right] \tag{4}$$

ここで、 $H=\int_{V(e)}P^{T}SPdV$, $G=\int_{V(e)}P^{T}(DN)dV$, $R=\int_{V(e)}(D^{T}P)^{T}ZdV$,

$W_1=\rho\int_{V(e)}N(x)^{T}N(x)dV$, $W_2=\rho\int_{V(e)}Z(x)^{T}Z(x)dV$

を表す。式 (4) をβ とqでそれぞれ変分すると、次式が得られる。

$$Kq+\omega^2Wq=0 \qquad t\in(t_1,\ t_2) \tag{5}$$

ここで、 $K=\begin{bmatrix} G^{T}H^{-1}G & -G^{T}H^{-1}R \\ -(GH^{-1}R)^{-1} & R^{T}H^{-1}R \end{bmatrix}$ $W=\begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix}$

3. ハイブリッド / 混合有限要素法による板の固有振動解析

本論文は、以上の理論を用いて板の振動に対してハイブリッド / 混合有限要素法の4- 節点要素を提案する。このようなハイブリッド / 混合有限要素法では古典的な有限要素法と違い、単変量ではなく多変量を考えてい

る。このため定式化に対して困難さが増すが、この方法を提案することは解の精度を高めるために特に有意義である。要素内部の任意の点(x,y)における変位(W,θ_x,θ_y)は要素の節点変位$(W_i,\theta_{xi},\theta_{yi})$ $(i=1,2,3,4)$により次のように表される。

$$W=\sum_i N_i(\xi,\eta)W_i \qquad \theta_x=\sum_i N_i(\xi,\eta)\theta_{xi} \qquad \theta_y=\sum_i N_i(\xi,\eta)\theta_{yi}$$

ここで，$N_i(\xi,\eta)=0.25*(1-\xi_i\xi)(1-\eta_i\eta)$ $(i=1,2,3,4)$， ただし、(ξ,η)は局所座標系である。

4. 解析結果と考察

本節は以上の理論に基づいていろいろな境界条件を有する正方形板の固有振動問題について考える。固有振動数を求めにあたってはサブスペース法を用いた。

結果を整理するために次式を定義する。

$$\lambda_{ij}=\omega_{ij}a^2\sqrt{\rho t/D} \quad (i,j=1,2,\cdots,n), \qquad \theta_{\lambda ij}=(HMFEM)_{\lambda ij}/(Exact)_{\lambda ij}$$

ここで、$D=\dfrac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$，は平板の曲げ剛性の定数で、$\omega_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$は円振動数である。

図 -2、図 -3と図 -4に示すモデルはそれぞれ周辺単純支持、対辺単純支持・他辺固定支持及び対辺単純支持・他辺自由の正方形板である。

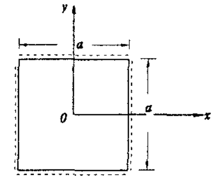

図 -2 周辺単純支持の正方形板

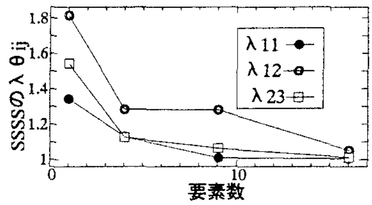

図 -5 収束性

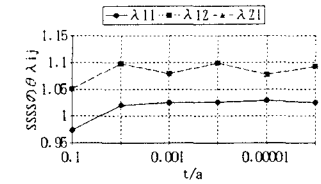

図 -8 板が薄いときの解

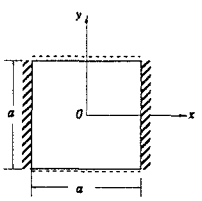

図 -3 対辺単純支持、他辺固定支持の正方形板

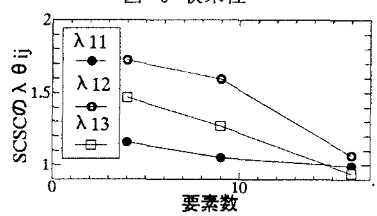

図 -6 収束性

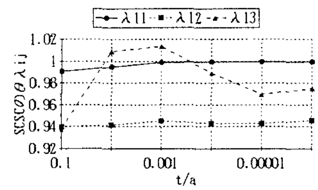

図 -9 板が薄いときの解

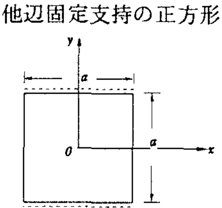

図 -4 対辺単純支持、他辺自由の正方形板

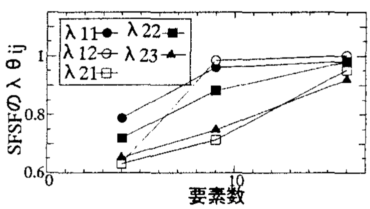

図 -7 収束性

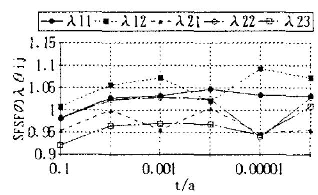

図 -10 板が薄いときの解

図 -5から図 -7は、ハイブリッド / 混合有限要素法による板の固有振動解析について要素数を増やした時の振動数λ_{ij}の収束性を表したものである。数値解析結果から、少ない要素で良い結果が得られていることが分かる[3]。また、図 -8から図 -10の結果から板を薄くしたときに解の安定性があることがわかる。即ち、板が薄くなっても$\theta_{\lambda ij}$に大きな変化が生じない$(0.9\leq\theta_{\lambda ij}\leq1.1)$。

5. まとめ

本研究において板の動的問題についてハイブリッド / 混合有限要素法を提案した。この研究は多変量有限要素法の応用を拡大した。

参考文献

[1] 段梅, 宮本裕, 岩崎正二, 出戸秀明, " 高精度化平板曲げ要素を用いたハイブリッド / 混合法の鋼構造解析へ応用 ", 鋼構造年次論文報告集, 第3巻 (1995年11月)。

[2] 段梅, 宮本裕, 岩崎正二, 出戸秀明, "h- アダプティブハイブリット / 混合法有限要素法の応用に関する研究 ", 東北支部技術研究発表演概要, 1996年3月14日。

[3] 土木学会, " 構造力学公式集 ", 昭和61年版。