

直交異方性弾性楕円リングの応力、変位の解析

福島高専 正員 ○堤 隆
山梨大学 正員 平島 健一

1. はじめに

直交異方性弾性体の応力および変位の解析は、Lekhnitskii⁽³⁾により領域内の楕円形境界面を単位円に写像する方法を用いて単連結問題について実施されている。しかし、楕円形リングなどの二重連結領域問題は、等方性の場合のように二つの境界面を同時に円に写像する写像関数が提案されていないため、応力関数を用いた解析が行われていない。そこで、本研究では、直交異方性弾性体の楕円リング問題について、単連結問題である中実の楕円板問題ならびに楕円孔を有する無限板問題の解を用い、拘束解除法⁽¹⁾による応力および変位の解析方法を提示する。

2. 解析方法

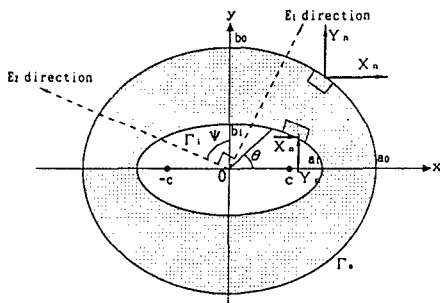


図1 楕円形リング

本研究で対象とする問題は、図1の内径 a_1 、 b_1 および外径 a_0 、 b_0 の共焦点の楕円形リングの外部境界 Γ_0 および内部境界 Γ_1 に任意分布の外力が作用するものである。この問題を図2に示す軸径 a_0 、 b_0 の中実の楕円板と図3に示す孔径 a_1 、 b_1 の楕円孔を有する無限板を図4に示す手順で重ね合わせ、応力および変位の解析を行なう。ここで、中実の楕円板および楕円孔を有する無限板の応力関数は次のものを用いる⁽²⁾⁽³⁾。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(z_1) &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m P_{1m}(z_1), \\ \Phi_2(z_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m P_{2m}(z_2). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(z_1) &= \sum_{m=1}^M C_m \tilde{\zeta}_1^{-m}, \\ \Phi_2(z_2) &= \sum_{m=1}^M D_m \tilde{\zeta}_2^{-m}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

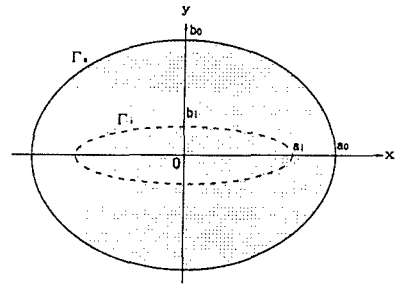


図2 中実の楕円板

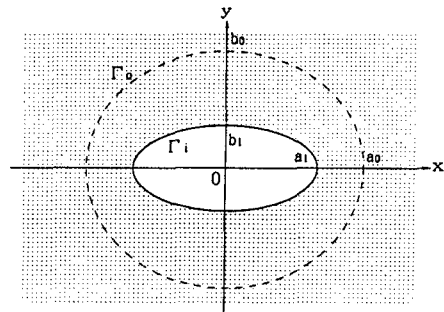


図3 楕円孔を有する無限板

$$z_k = x + \mu_k y \dots\dots\dots (3)$$

$$P_{km}(z_k) = -\frac{\zeta_k^m + \bar{\zeta}_k^{-m}}{(a_0 - i\mu_k b_0)^m} \quad (k=1, 2) \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 μ_k は異方性の度合いにより決定される異方パラメータ、 ζ_k 、 $\bar{\zeta}_k$ はそれぞれ楕円形リングの外部境界、内部境界を単位円 (i.e. $e^{i\theta}$) に写像する写像関数である。

外荷重応力 X_n 、 Y_n と応力関数との関係式は次のように表される⁽³⁾。

$$\left. \begin{aligned} 2\operatorname{Re}[\mu_1 \Phi_1(z_1) + \mu_2 \Phi_2(z_2)] &= \mp \int_0^s X_n ds, \\ 2\operatorname{Re}[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)] &= \pm \int_0^s Y_n ds. \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

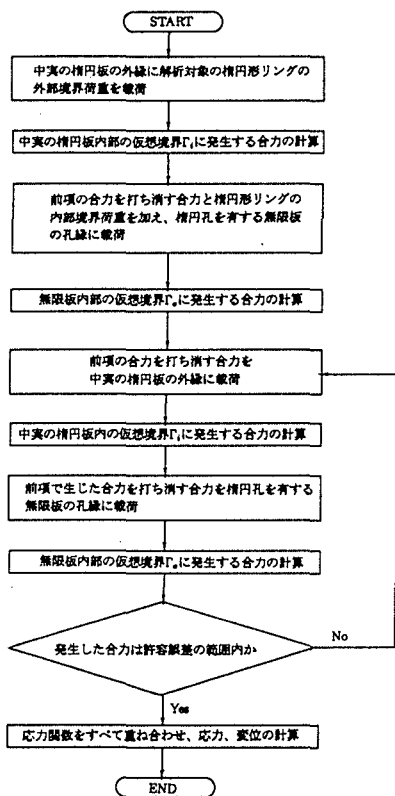


図4 重ね合わせによる解析手順

ただし、複号は内部境界では上側を、外部境界では下側をとる。外部境界上および内部境界上における式(5)の右辺をフーリエ級数に展開すれば、両辺の $e^{im\theta}$ ($-\infty < m < \infty$) の項同士の係数比較により複素係数 A_m 、 B_m 、 C_m 、 D_m が決定される。なお、応力成分 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} および変位成分 u_x 、 u_y は次式により表される⁽³⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\operatorname{Re}[\mu_1^2 \Phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \Phi_2'(z_2)], \\ \sigma_y &= 2\operatorname{Re}[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2)], \\ \tau_{xy} &= -2\operatorname{Re}[\mu_1 \Phi_1'(z_1) + \mu_2 \Phi_2'(z_2)]. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

$$\left. \begin{aligned} u_x &= 2\operatorname{Re}[p_1 \Phi_1(z_1) + p_2 \Phi_2(z_2)], \\ u_y &= 2\operatorname{Re}[q_1 \Phi_1(z_1) + q_2 \Phi_2(z_2)]. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= a_{11}\mu_1^2 + a_{12}, & p_2 &= a_{11}\mu_2^2 + a_{12}, \\ q_1 &= (a_{12}\mu_1^2 + a_{22})/\mu_1, & q_2 &= (a_{12}\mu_2^2 + a_{22})/\mu_2. \end{aligned} \right\} (8)$$

ここで、 a_{11} 、 a_{12} 、 a_{22} は弾性コンプライアンスである。

3. 数値計算例

図5は楕円形リングに変動する内圧 $-p_1 \cos 2\theta$ が作用したときの最大主応力 σ_1 、最小主応力 σ_2 の分布を $E_2/E_1 = 5.0$ 、

座標軸と弾性主軸とがなす角 $\Psi = 0$ の場合について示したものである。ヤング係数の小さい E_1 方向に大きな圧縮方向の応力の発生がみられ、異方性の影響が観察される。

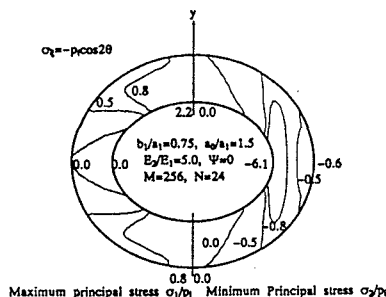


図5 異方性楕円形リングの主応力分布
($\sigma_{\xi 1} = -p_1 \cos 2\theta$)

図6は弾性主軸が楕円の長軸方向に対し 0° 、 90° だけ傾いた $E_2/E_1 = 5.0$ の直交異方性楕円形リングに変動する外圧 $-p_0 \cos 2\theta$ が作用したときの変位の様子を表したものである。ヤング係数が小さい E_1 方向に楕円形リングが大きく変形する様子が観察される。

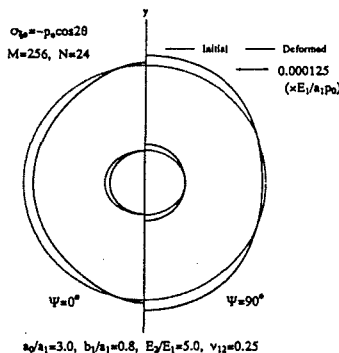


図6 異方性楕円形リングの変形 ($\sigma_{\xi 10} = -p_0 \cos 2\theta$)

4. おわりに

本研究では光弾性実験やFEM等に頼らざるを得なかった楕円形リング問題を楕円孔を有する無限板と中実の楕円板のそれぞれに合力で境界条件を与え、それらを重ね合わせることで解く手法を提案した。これにより計算があまり煩雑にならずに解析することを可能にした。

文 献

- (1) Hetenyi, M.: *Jour. Appl. Mech.* 27, (1960), 289-296.
- (2) 川久保, 堤, 平島: *機論*, 62-599, A (1996), 1626-1633.
- (3) Lekhnitskii, S.G., *Anisotropic Plate*, (1968), Gordon & Breach.