

一様軸圧縮力を受ける薄肉円筒シェルの 座屈後挙動解析

東北大学工学部 ○学生員 横山 薫
東北大学工学部 正 員 中沢 正利
東北大学工学部 正 員 岩熊 哲夫

1. まえがき

一様軸方向圧縮力を受ける薄肉円筒シェルの研究では八巻ら¹⁾が行った軸方向変位を制御した実験が有名であり、シェルの座屈後挙動の全容が明らかにされている。しかしそのメカニズムの詳細については言及されておらず、またその後の研究でも報告された例がない。そこで本研究では一様軸圧縮力を受ける薄肉円筒シェルの座屈後釣り合い経路を山田ら²⁾と同様に Donnell の非線形シェル理論に基づく解析的な数値解析手法を用いて追跡することにより座屈後挙動のメカニズムを明らかにする。

2. 解析方法

図-1に示すような軸方向高さ L 、半径 R 、シェル厚 t の両端単純支持の完全円筒シェルが軸方向に一様軸圧縮応力 σ を受ける場合を考える。軸方向、周方向、面外方向の座標を x, y, z とし、各方向の変位を u, v, w とする。変位関数として次のような境界条件を厳密に満足する2重フーリエ級数を採用する。

$$u = \frac{Lt}{R} \sum_i \sum_j \bar{u}_{ij} \cos(iy/R) \cos(j\pi x/L) \dots (1-a)$$

$$v = \frac{Lt}{R} \sum_i \sum_j \bar{v}_{ij} \sin(iy/R) \sin(j\pi x/L) \dots (1-b)$$

$$w = t \sum_i \sum_j \bar{w}_{ij} \cos(iy/R) \sin(j\pi x/L) \dots (1-c)$$

ここで、 i は周方向の波数、 j は軸方向の半波数である。式(1)の変位関数、Donnell型のひずみ-変位関係、及び線形弾性体を仮定して全ポテンシャルエネルギーを求め、全ポテンシャルエネルギー停留の原理を用いて釣り合い式を誘導する。求めた釣り合い式は連立3次非線形代数方程式となり、増分法と標準的なNewton-Raphson法により釣り合い経路を追跡した。

3. 解析結果

ここでは、 $Z \equiv (L^2(1-\nu^2)^{1/2})/(Rt) = 1000$ の場合の解析結果を示す。尚、本解析では $x = L/2$ に対して対称な変形モードの釣り合い経路の追跡に限定した。

(1) 釣り合い経路

無次元化した荷重 Σ - 軸方向変位 $\bar{\delta}$ 関係を図-2に示す。八巻ら¹⁾が行った軸方向変位制御的に考えると、初期座屈点であるA点までは変位の増加に伴い荷重は線形的に増加する。A点は不安定対称分岐点であるためシェルは安定性を失い同じ変位レベルにある安定な釣り合い経路($i=10$)上のB点に移る。 $\bar{\delta}$ が更に増加すると $i=10$ の釣り合い経路を辿りC点に達する。

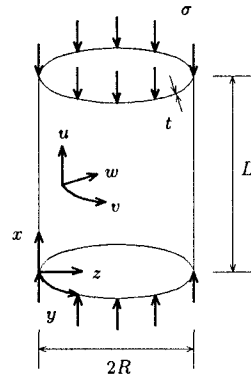


図-1 一様軸圧縮力を受ける薄肉円筒シェル

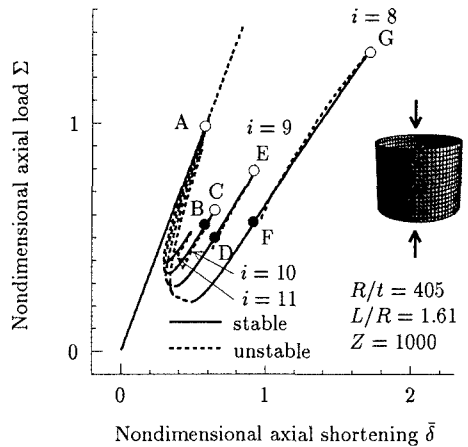


図-2 釣り合い経路： $\Sigma - \bar{\delta}$ 関係、($Z = 1000, i = 8, 9, 10, 11$), $\Sigma = \sigma / ((3(1-\nu^2))^{-1/2} E(t/R))$, $\bar{\delta} = -(Lt)^{-1} R[u]_{x=0}^L$

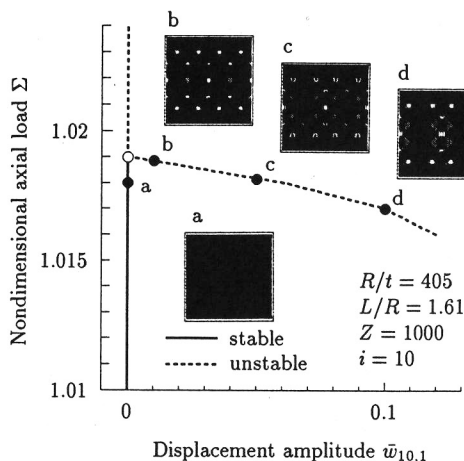


図-3-a $0 \leq \bar{w}_{10,1} \leq 0.1$

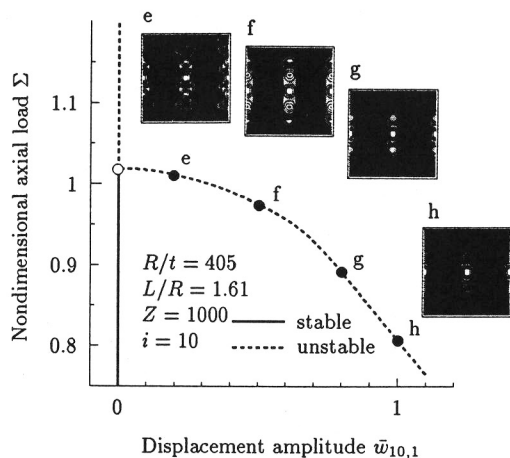


図-3-b $0.2 \leq \bar{w}_{10,1} \leq 1.0$

図-3 変位 w の等高線図, ($Z = 1000, i = 10$)

C 点は変位 $\bar{\delta}$ に関する極大点であるため C 点から同じ変位レベルにある安定な釣り合い経路 ($i = 9$) 上の D 点に移る。更に $\bar{\delta}$ が増加すると D - E - F - G と辿り、G 点以降も飛び移り座屈を繰り返しながら $i = 7, 6, 5, \dots$ の釣り合い経路上を進むと考えられ、変位 $\bar{\delta}$ の極大点を過ぎるごとに、 i の値が 1 つずつ減少するというメカニズムを明らかにした。これらの挙動は八巻ら¹⁾の実験結果と良く一致している。

(2) 変形モード

変位 w の等高線図、シェルの変形モードを図-3,4に示す。等高線図は $0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq 0.4\pi R$ の範囲を示している。図-3-aの a 点では荷重開始直後から発生する、軸方向にのみ波をもつ座屈前変位成分 $\bar{w}_{0,j}$ しか存在しないため図に示すような横縞の等高線図、変形モードになっている。白丸で示した初期座屈が起きると、座屈前変位成分 $\bar{w}_{0,j}$ に加えて周方向に波を持つ座屈後変位成分 $\bar{w}_{i \neq 0,j}$ が現れ、初期座屈直後の b 点では diamond pattern が見られる。その後の c, d 点では diamond pattern が崩れ、周方向波数が $i = 20$ から $i = 10$ の変形モードに移行していることが図-3-aの等高線図から判る。図-3-bの e, f 点となるとその傾向が顕著となり、g, h 点では変形がシェルの中央部 ($x = L/2$) 付近に集中する変形モードとなっている。

参考文献

- 1) Yamaki, N.: *Elastic stability of circular cylindrical shells*, Elsevier, Amsterdam, 1984.
- 2) Yamada, S. and Croll, J.G.A.: Buckling and post-buckling characteristics of pressure-loaded cylinders, *Proc. J. of Applied Mech, ASME*, Vol.60, pp.290-299, 1993.



図-4-a a 点



図-4-b b 点



図-4-c c 点



図-4-d d 点



図-4-e e 点



図-4-f f 点



図-4-g g 点



図-4-h h 点

図-4 変形モード, ($Z = 1000, i = 10$)