

2次元応力集中問題に関する 有限要素自動メッシュ再分割法

八戸工業高等専門学校 学生員 ○中村 公一

八戸工業高等専門学校 学生員 岩沢 道徳

八戸工業高等専門学校 正会員 杉田 尚男

1. はじめに

有限要素解析において要素分割の優劣は、計算の精度、安定性および計算時間に大きく関係する。そのため、自動要素生成に関する事後処理として、要素形状のチェックや、スムージング、節点のリナンバリング等が施されるが、要素数の効率化、連続的な要素配置という観点においては、必ずしも最適化されたとは言い難い。本論文では、2次元応力集中問題について、節点の応力値をもとに、応力勾配ベクトルを算出して要素を再分割し、最適メッシュを生成するものである。

2. 任意形状認識、初期要素生成

Voronoi 理論は、幾何学的な領域分割理論として説明することができる。N次元Euclid空間で、n個の母点 $P_1(x_1), P_2(x_2), \dots, P_n(x_n)$ が与えられるとき、母点が最も近い点の V_i は次式で与えることができる。

$$V_i = \bigcap_{j \neq i} \left\{ x \in R^N \mid \|x - x_i\| < \|x - x_j\| \right\} \\ (i = 0 \cdots n, j = 1 \cdots i-1, i+1 \cdots n)$$

V_i は、母点の $P_i(x_i)$ の Voronoi 領域と呼ば

れる多角形である。すなわち、この Voronoi 領域は、母点と母点を結ぶ直線の垂直2等分線によって構成されるもので、応力解析には、この多角形の各頂点（これ以後この多角形の各頂点を節点とする）と、母点 P_i とを結ぶことにより三角形要素を形成しそれを用いる。

節点の特徴として、その周りの3個の母点を頂点とする三角形の外心であるということがいえる。節点は、その特徴に着目して、最大空円問題を用いて生成する。

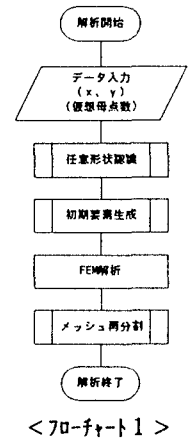
<最大空円問題>⁽¹⁾

平面上に指定されたn個の点の集合を $S = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ とし、Sに属す点を内部に1つも含まない円（円周上にSの点があることはかまわない）を、Sに関する空円という。Tを平面上の凸な多角形領域（境界も含む）とする。TはSを含む場合と含まない場合どちらでもよい。このとき、Sに属する空円で、T内に中心をもち、半径が最大のものを求める。この問題は最大空円問題と呼ばれ、その解は最大空円と呼ばれる。

- 1) Sに属す少なくとも3点がcの円周上にある場合（図1のC1）
- 2) Sに属す少なくとも2点がcの円周上にあり、cの中心がTの境界辺上にある場合（図1のC2）
- 3) Sに属す少なくとも1点がcの円周上にあり、cの中心がTの頂点にある場合（図1のC3）

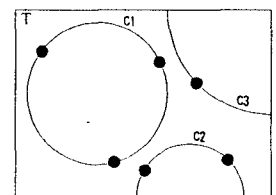
以上の条件のうち、どれか一つを満たす最大空円の中心座標を節点とする。

このように節点は母点をもとに生成されるため、まず母点を配置し任意形状認識を行い、その後節点を生成し初期要素を生成する。



ここで、 x は、ある位置ベクトル

x_i は、母点 i の位置ベクトル $\| \cdot \|$ は、Euclid 距離



<図1>

3. メッシュ再分割 応力集中部の要素最適化に対応するために、メッシュ再分割をおこなう。

応力勾配とは応力集中の指標となるもので、応力値が連続していない場合に非常に大きい値になる。応力勾配 SG_{ij} は、求めようとする2点の応力 σ_i 、 σ_j とその2点の距離 d_{ij} を用いて、

$$SG_{ij} = \frac{\sigma_j - \sigma_i}{d_{ij}} \quad \text{で定義する。}$$

メッシュ再分割のアルゴリズムを、フローチャート2に示す。

<ステップ1 母点の応力推定>

応力勾配による母点移動を行うため、母点を囲む三角形要素の要素中心応力を用いて、母点部分の応力を推定する。

<ステップ2 母点—関係母点の応力勾配を求め、母点の消去、母点の生成>

推定した母点応力と、関係母点との応力勾配を求める。すべての関係母点との応力勾配が小さい場合には、点を1個残して関係母点を消去する。応力勾配が大きい場合には、ステップ3で母点を移動後、新たに母点を最大空円問題を用いて生成する。

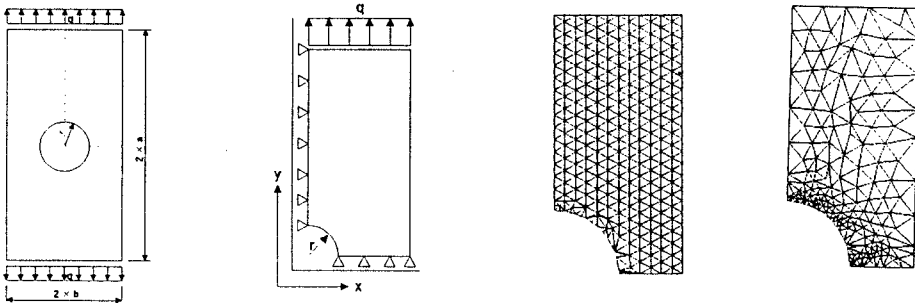
<ステップ3 母点—最大応力が発生している要素中心位置との応力勾配を求め、母点の移動方向、移動量を求める>

母点と、最大応力が発生している要素中心位置との応力勾配を求め、応力勾配の傾きをもとに、母点の移動量を決定する。移動方向は、最大応力が発生している要素の中心位置の方向へ移動する。

<ステップ4 メッシュ生成>

節点は、最大空円問題を用いて生成する。

4. 適用例 応力集中が顕著に表れる、有孔平板モデルを1/4引張解析した。

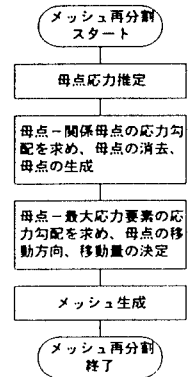


<図2 有孔平板モデル> <図3 1/4解析モデル> <図4 初期要素配置> <図5 再分割後>

5. おわりに 本手法を用い要素最適化を行った結果、1回の計算のみで、予想される応力集中部分での要素配置が密になっていることが確認できた。今後、いびつな要素形状を無くすために要素のスムージング化が必要である。

6. 参考文献

- (1) 杉原厚吉：ポロノイ図を通して（6. 最大空円とその応用）：数学セミナー
- (2) 杉田、鳥居：Voronoi 理論を適用した3次元体の形状認識に関する基礎的研究
：第46回日本学術会議応用力学連合講演予稿集（1997）
- (3) 北上、山本、杉田：Voronoi 多面体による3次元有限要素自動メッシュ生成法
：平成7年度土木学会東北支部 技術研究発表会講演集（1996）



<フローチャート2>