I －17

最大空円理論を応用した有限要素３次元任意形状認識

八戸工業高等専門学校　学生員　○岩沢　道徳
八戸工業高等専門学校　学生員　　中村　公一
八戸工業高等専門学校　正会員　　杉田　尚男

I．はじめに　有限要素法解析で取り扱われる問題はコンピュータの飛躍的な性能向上と共に複雑さを増してきている。これに伴い、解析モデル作成のための自動要素分割とそのための形状モデリングからなるプリプロセッサーの重要性も増してきている。しかし、従来の自動要素分割法で生成した要素は、その形状や要素数の効率化、連続的な要素配置などの点から最適化されたとは言い難い面を持っている。本研究は形状モデリングを主とした有限要素分割について、Voronoi理論の概念を利用した最大空円理論を応用することで、３次元任意形状における最適な要素分割法の確立を提案するものである。

II．Voronoi理論　Voronoi理論は幾何学的な領域分割理論として説明できる。Ｎ次元Euclid空間で、ｎ個の母点Pi(xi)(i=1...ｎ)が与えられる時、Piが最も近い点である様な点の集合ViはPiの勢力圏として与えられる。

$$V_i = \bigcap_{j:j\neq i}\left[x \in R^N \middle| \|x - x_i\| < \|x - x_j\|\right]$$

Viは母点PiのVoronoi領域と呼ばれる凸多面体で、母点と母点を結ぶ直線の垂直二等分面によって構成される。この凸多面体の各頂点（以後節点）と母点Viを結ぶことにより形成される四面体要素が有限要素法における解析要素となる。

III．最大空円理論[1]　平面上に指定されたｎ個の点の集合をＳ＝{Ｐ1，Ｐ2，...，Ｐn}とし、Ｓに属す点を内部に一つも含まない円（円周上にＳの点があることは構わない）を、Ｓに属する空円という。Ｔを平面上の凸な多角形領域（境界も含む）とする。ＴはＳを含む場合と含まない場合どちらでもよい。このとき、Ｓに属する空円でＴ内に中心を持ち、半径が最大のものを求める。Ｔ内に中心を持つ一つの空円ｃが存在した場合に求められる解には３つのパターンを列挙できる。

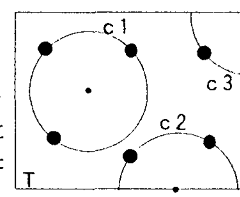

図１

(1)Ｓに属す少なくとも３点がｃの円周上にある場合（図1-ｃ1）
(2)Ｓに属す少なくとも２点がｃの円周上にあり、ｃの中心がＴの境界辺上にある場合（図1-ｃ2）
(3)Ｓに属す少なくとも１点がｃの円周上にあり、ｃの中心がＴの頂点にある場合（図1-ｃ3）

これらを３次元へ拡張した場合には、Ｓは空間内に指定されたｎ個の点の集合へ、Ｔは空間内の凸な多面体領域へ、空円は空球へ置換する。これらの場合に求められる解には４つのパターンが考えだされる。

(1)Ｓに属す少なくとも４点がｃの球面上にある場合（図２-(a)）
(2)Ｓに属す少なくとも３点がｃの球面上にあり、ｃの中心がＴの境界面上にある場合（図２-(b)）
(3)Ｓに属す少なくとも２点がｃの球面上にあり、ｃの中心がＴの境界辺上にある場合（図２-(c)）
(4)Ｓに属す少なくとも１点がｃの球面上にあり、ｃの中心がＴの頂点にある場合（図２-(d)）

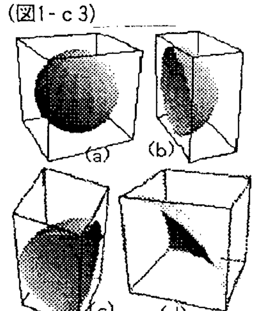

図２

３次元任意形状認識には、領域Ｔ内に中心を持ち半径が最大のＳに属する空球を全て探査する必要がある。そして、全ての空球が母点の配置によって求められれば、その中心は節点であり。また、母点１個と節点３個の組み合わせによって空球が生成されれば、それらの組み合わせから生成される四面体は有限要素法における四面体解析要素と考えることができる。

IV．節点生成と要素生成　節点座標は、母点の配置より求められる空球中心座標であり、球の方程式より以下の式にて算出する。本論では、紙面の都合上、領域Ｔが直方体の場合の方程式のみを示す。

(1) Sに属す少なくとも4点がcの球面上にある場合

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 & 1 \\ 2x_2 & 2y_2 & 2z_2 & 1 \\ 2x_3 & 2y_3 & 2z_3 & 1 \\ 2x_4 & 2y_4 & 2z_4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ i \\ j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 \\ -x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 \\ -x_3^2 - y_3^2 - z_3^2 \\ -x_4^2 - y_4^2 - z_4^2 \end{pmatrix} \quad \text{---①}$$

(2) Sに属す少なくとも3点がcの球面上にあり、cの中心がTの境界面上にある場合

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 1 \\ 2x_2 & 2y_2 & 1 \\ 2x_3 & 2y_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ i \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 - 2jz_1 \\ -x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 - 2jz_2 \\ -x_3^2 - y_3^2 - z_3^2 - 2jz_3 \end{pmatrix} \quad \text{j が既知の時} \quad \text{---②}$$

(3) Sに属す少なくとも2点がcの球面上にあり、cの中心がTの境界辺上にある場合

$$\begin{pmatrix} 2z_1 & 1 \\ 2z_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 - 2hx_1 - 2iy_1 \\ -x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 - 2hx_2 - 2iy_2 \end{pmatrix} \quad \text{h・i が既知の時} \quad \text{---③}$$

(4) Sに属す少なくとも1点がcの球面上にあり、cの中心がTの頂点にある場合

この場合はTの頂点が節点となる。

ここで、(x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) (x_3, y_3, z_3) (x_4, y_4, z_4) は任意母点座標

$$h = -x_o \quad i = -y_o \quad j = -z_o \quad k = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - r$$

(x_0, y_0, z_0) は空球の中心座標、r は空球の半径である。

要素は、母点1個と節点3個の組み合わせで式①を用いて表わされ、解析用要素の適合条件は式④で表わすことができる。

$$r \le \sqrt{(x_o - x_i)^2 + (y_o - y_i)^2 + (z_o - z_i)^2} \quad (i = 1 \ldots n) \quad \text{---④}$$

V. 適用例　x方向に6、y方向に5、z方向に4の直方体に本理論を適用し、要素生成を行なったものを図3に示す。図4の角度分布図からもわかるようにこれらの要素の角度は約50°から90°の範囲にあるため、いびつな要素は生成されていない。

(x, y, z)=(6, 5, 4)
分割幅　1.0
初期母点数　105
節点数　225
要素数　1440

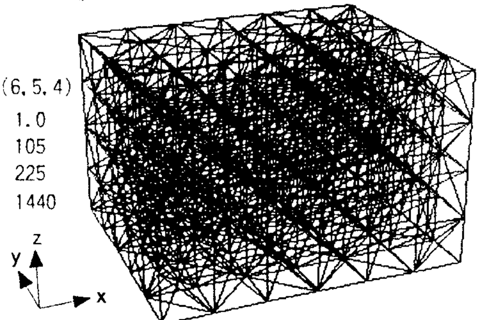

図3

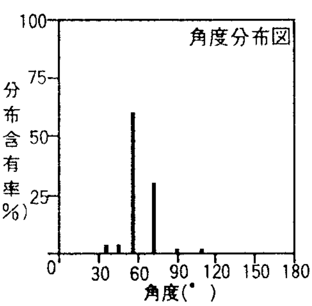

図4

VI. おわりに　本研究での形状認識法は、ある一定の基準で与えられた解析領域の母点配置から幾何学的に最も最適な要素分割を行なう際に、特に有効である。今後は、複雑な形状体の認識のための応用法と応力解析後の最適形状体の生成について検討する必要がある。

VII. 参考文献

(1) 杉原厚吉：ボロノイ図を通して見ると(6.最大空円とその応用)：数学セミナー
(2) 杉田・鳥居：Voronoi理論を用いた3次元体の形状認識に関する基礎的研究
：第46回日本学術会議応用力学連合講演予稿集 (1997)
(3) 岡部・鈴木：最適配置の数理：朝倉書店