I − 2

金属強度の統計理論

東北大学工学部　学生員　○佐藤 太造
東北大学工学部　正会員　　池田 清宏

1.　序論

本研究は，分岐により縞状の解が発生する場合の分岐荷重の確率変動のメカニズムを解明するものである．この種の解の発生に関する研究としては，Hill・Hutchingson[1)]による塑性分岐の理論や，Ikeda・Murota・Nakano[2)]による雁行モードのメカニズムの群論的分岐理論による解明等があげられる．さらに，室田[3)]はこの研究を発展させて分岐により縞状の解が発生する場合の分岐荷重の確率変動を表す基礎式を誘導している．本研究の目的はこの基礎式の数値解をえることにより，そのメカニズムを解明しようとするものである．

2.　理論

(1)　群論的分岐理論

ある非線形釣合方程式（N 次元）を

$$F(u,f,\epsilon)=0 \tag{1}$$

とする．ここに f は荷重パラメータを，u は変位ベクトルを各々表す．荷重の極大点や分岐点等の特異点の近傍において Liapunov-Schmidt 展開することにより，釣合い式から分岐方程式

$$\widetilde{F}(w,f,\epsilon)=0 \tag{2}$$

が誘導される．ここに，w は分岐モードに対応する変位を表し，M 重分岐点においては $\widetilde{F}$ と w はともに M 次元ベクトルとなる．

釣合式の対称性を記述するにあたり，（鏡映や回転等を表す）変換写像 g からなる群 G を想定する．群 G の全ての元 g が引起こす座標変換に対して，

$$T(g)F(u,f,0)=F(T(g)u,f,0),\quad {}^{\forall}g\in G \tag{3}$$

が成り立つとき，釣合方程式 F は群 G に対して同変であると呼ばれる．ここに $T(g)$ は群 G の元 g が N 次元ベクトル u（または F）に及ぼす作用を表す表現行列である．群同変性は分岐方程式にも遺伝し，

$$\widetilde{T(g)}\widetilde{F}(w,f,0)=\widetilde{F}(\widetilde{T(g)}w,f,0) \tag{4}$$

がなりたつ．

(2)　$O(2)\times O(2)$ 同変系の４重分岐点

Ikeda・Murota・Nakano[2)]は上下・左右が周期境界により接続された均一な長方形領域が $O(2)\times O(2)$ 同変系であることを示し，この系の４重分岐点における解を求めている．これはこの系の分岐方程式 (2) が対称条件 (4) のもとでどのような解を持つかを調べたものである．室田[3)]はこの方法論を初期不整を持つ不完全系へ拡張し，下記のような分岐方程式の形を求めている．

$$G_1=\alpha\epsilon+x\left(\lambda+Py^2+Qy^2\right)=0 \tag{5}$$

$$G_2=\beta\epsilon+y\left(\lambda+Qx^2+Py^2\right)=0 \tag{6}$$

この釣合い式が特異解を持つ条件は次式で表される．

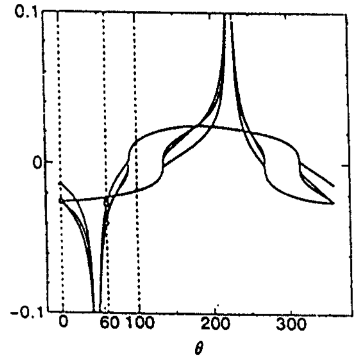
$$J\equiv\frac{\partial(G_1,G_2)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\lambda+3Px^2+Qy^2 & 2Qxy\\ 2Qxy & \lambda+3Py^2+Qx^2\end{vmatrix}=0 \tag{7}$$

λ は完全系分岐点からの荷重の増分，ϵ は初期不整，x,y は複素変位を表す．また P,Q は任意の係数で，α^2,β^2 は互いに独立でそれぞれ自由度２の χ^2–分布に従う．$(\alpha,\beta\geq 0)$

3. 解析結果及び考察

(1) $\theta \sim \lambda$ 関係

係数 P と Q の値，すなわち $\theta = \tan^{-1}(Q/P)$ $(0^\circ \leq \theta < 360^\circ)$ を変化させ，式 (5)~(7) を連立して求めた λ の値をプロットしたのが**図–1**である．この図からある θ における極値の数，及びその大小関係がわかる．



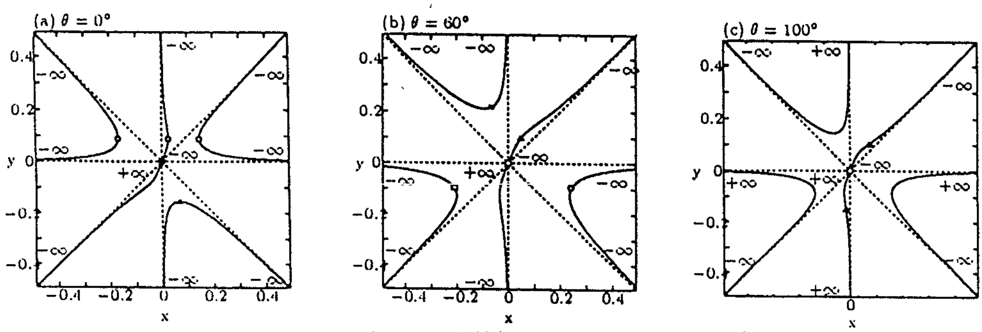
図–1 $\theta \sim \lambda$ 関係 $(\theta = \tan^{-1}(Q/P))$

(2) λ の軌跡

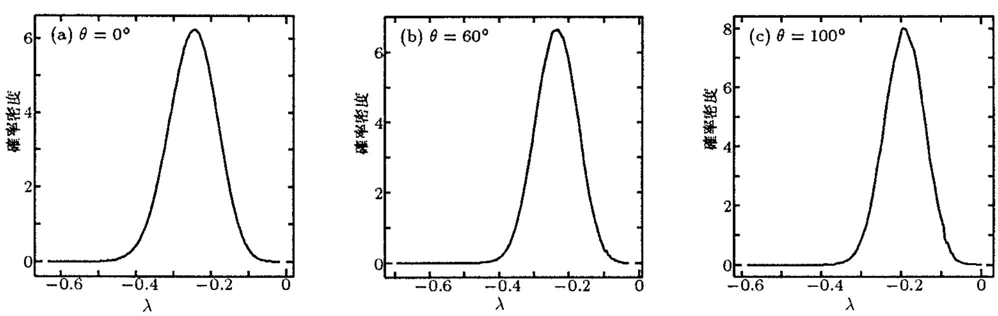
式 (5),(6) から表される x, y, λ の関係を x–y 平面に投影したのが**図–2**である．ここで物理的に意味があるのは原点とつながっており，極大点の存在する曲線である．

(3) 確率密度曲線の誘導

α^2, β^2 がそれぞれ自由度 2 の χ^2–分布に従うと仮定して α, β を変化させた時に，式 (5)~(7) から求まる 座屈荷重 λ と確率密度の関係をプロットしたのが**図–3**である．



図–2 変位と λ の関係 $(\alpha = 0.02, \beta = 0.05, \varepsilon = 0.03)$



図–3 λ に関する確率密度曲線 $(\varepsilon = 0.03)$

4. 結論

本研究により塑性縞発生時の最大荷重の確率分布を求める事ができた．この結果の実問題への適用が今後の課題である．

参考文献

1) R. Hill and J. W. Hutchinson, Bifurcation phenomena in the plane tension test. Journal of Mechanics and Physics of Solids, **23** (1973), pp. 239–264.
2) K. Ikeda, K. Murota and M. Nakano, Echelon modes in uniform materials. International Journal of Solids and Structures, **31** (1994), pp. 2709–2733.
3) 室田一雄, $O(2) \times O(2)$ 同変系の 4 重分岐点におけるランダム不整に関する Private communication (1996).