

Ⅲ－25

散逸関数を用いた構成則の再定式化

東北大学 学生員 ○金子賢治
東北大学 学生員 倉科広作
東北大学 正 員 岸野佑次

1.はじめに

材料の非弾性部分に関する構成則は、種々の研究が行われているが、本論文では、著者の一人が提案している構成則理論¹⁾を再定式化し、簡単な応用例を示す。再定式化の主目的は、これまでの理論が主に摩擦性材料を対象としていたのに対し、種々の材料に適用できるようにすることである。

2.散逸関数を用いた構成則の定式化

(1)散逸変形における拘束条件

材料の非弾性変形は、散逸変形モードに支配されることができ、散逸変形モードは、材料の種類や応力レベルに応じた固有のものであり、材料の破壊における破壊モードと類似したものである。ここでは、まず、このような散逸変形モードに含まれる拘束条件を導入する。

まず、ひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ を弾性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^e$ と散逸ひずみ速度 $\dot{d}$ とに分解する。

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{d} \quad (1)$$

弾性ひずみ速度については通常の応力-ひずみ関係を仮定する。散逸ひずみ速度については、その方向と大きさをを用いて次式のように書けるものとする。

$$\dot{d} = n \dot{\alpha} \quad (2)$$

ここに、 n は散逸ひずみ速度 $\dot{d}$ の方向を表す単位テンソルを表し、次式を満足する。

$$n : n = 1 \quad (3)$$

また、 $\dot{\alpha}$ は散逸ひずみ速度 $\dot{d}$ の大きさを表す量で、 $\dot{\alpha}$ の時間積分 α は散逸変形の進行を表すパラメータとして用いられる。

金属材料の塑性変形においては体積ひずみが零という拘束があるように、一般に散逸ひずみの方向 n は、変形の履歴や応力状態等によってある種の拘束をうけるものと考えられる。この拘束を一般に次式のように n の斉一次式で表し、拘束条件とする。

$$l : n = C \quad (4)$$

$$C = C(\sigma, d) \quad (5)$$

$$l = l(\sigma, d) \quad (6)$$

ここで C 、 l はともに σ 、 d の関数である。また、 l は n と同様に単位のテンソルであるとして次式を満足する。

$$l : l = 1 \quad (7)$$

(2)散逸仕事と散逸条件

材料の変形に伴って内部応力のする仕事のうち、散逸変形に対応する部分を散逸仕事と称する。散逸仕事速度は次式のように与えられる。

$$\sigma : \dot{d} = \omega \dot{\alpha} \quad (8)$$

$$\omega \equiv \sigma : n \quad (9)$$

ここに、 ω は単位の散逸ひずみあたりの散逸仕事を表す。 ω は n の値によっては負になりえるが散逸変形の不可逆性により実際の n に対しては正となる。ここで、散逸変形の生じる条件として次の2つの条件を仮定する。

散逸条件①： ω が、応力状態、変形履歴、 n によってある一定のエネルギーレベルに達していること。

散逸条件②：条件①を満足するものが n 以外にはないこと。

以上の2つの散逸条件を満足するとき散逸変形が生じるが、散逸条件①におけるある一定のエネルギーレベルは、破壊力学におけるエネルギー解放率に対応させて、次の散逸関数と呼ばれる関数により与えられると仮定する。

$$\varphi = \varphi(\sigma, n, d) \geq 0 \quad (\text{for } n : n = 1) \quad (10)$$

散逸条件①はこの散逸関数を用いて次式のように表すことができる。

$$f \equiv \varphi - \omega = 0 \quad (\text{for } n : n = 1) \quad (11)$$

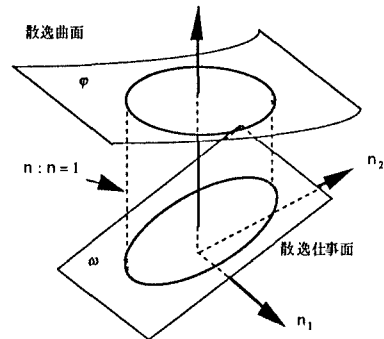


図-1 散逸ひずみ速度空間

この様子を散逸ひずみ速度空間に表すと、図-1のようになる。図-1の場合は载荷の初期段階を表したものであり、 $n : n = 1$ となる全ての n に対して $f > 0$ であり散逸条件を満たしていない。この場合は変形は、弾性変形のみとなる。この後、载荷が進みはじめて散逸が起こる際には $f = 0$ となり、 ω と φ は $n : n = 1$ 上で接することになる。すなわち、散逸条件②も満足する。これ以降の散逸変形は、この状態を保ったまま推移することとなる。また、実際に生じる n 以外の n に対しては $f > 0$ となるので、 ω と φ が接する条件は f が極小として満たされる。

(3)流動則

$n : n = 1$ の付帯条件のもとでの f の極値条件（散逸条件②）より流動側が誘導される。この条件式は次式で与えられる。

$$F \equiv f + \frac{a}{2} n : n + b l : n \quad (12)$$

$$\frac{\partial F}{\partial n} = a n + b l - \tau = 0 \quad (13)$$

ここに、 a 、 b はラグランジュの未定係数であり、 τ は次式で定義される量である。

$$\tau \equiv -\frac{\partial f}{\partial n} = \sigma - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad (14)$$

式(13)より流動則は次式のように書かれる。

$$n = \frac{\tau - bI}{a} \quad (15)$$

ここで、付帯条件 $n:n=1$ を式(15)に用い、式(13)と I の複内積を施せば、

$$a = \sqrt{(\tau - bI) : (\tau - bI)} \quad (16)$$

$$b = \tau : I - aC \quad (17)$$

を得る。この2式より未定係数 a 、 b の値が求まる。

(4) 硬化・軟化則

散逸が連続して生じるためには、この散逸条件を満たし続ける必要がある。このことは、塑性論における適応の条件と同様である。すなわち式(11)の時間微分をとることにより、次式が成立する。

$$\dot{f} = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial \varphi}{\partial d} : n \dot{\alpha} - \tau : \dot{n} - n : \dot{\sigma} = 0 \quad (18)$$

ここで、 $\tau : \dot{n}$ は式(15)と $n : \dot{n} = 0$ となることより次式のように書かれる。

$$\tau : \dot{n} = bI : \dot{n} \quad (19)$$

さらに、 $I : \dot{n}$ は式(4)より、

$$I : \dot{n} = \dot{C} - n : \dot{I} \quad (20)$$

$$= \frac{\partial C}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial C}{\partial d} : n \dot{\alpha} - n : \frac{\partial I}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} - n : \frac{\partial I}{\partial d} : n \dot{\alpha}$$

となる。これより式(18)は、

$$\begin{aligned} \dot{f} = & \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} - n - b \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma} - n : \frac{\partial I}{\partial \sigma} \right) \right\} : \dot{\sigma} \\ & + \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial d} - b \left(\frac{\partial C}{\partial d} - n : \frac{\partial I}{\partial d} \right) \right\} : n \dot{\alpha} \end{aligned} \quad (21)$$

となる。従って、次の硬化・軟化則を得る。

$$\dot{\alpha} = \frac{m : \dot{\sigma}}{D} \quad (22)$$

$$m \equiv n - \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} + b \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma} - n : \frac{\partial I}{\partial \sigma} \right) \quad (23)$$

$$D \equiv \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial d} - b \left(\frac{\partial C}{\partial d} - n : \frac{\partial I}{\partial d} \right) \right\} : n \quad (24)$$

以上より、構成則は次式のような非関連型流動則となる。

$$\dot{d} = n \dot{\alpha} = \frac{nm : \dot{\sigma}}{D} \quad (25)$$

3. 金属材料への応用

ここでは、散逸関数を用いた構成則理論の金属材料への応用例を示す。

まず、弾性ひずみ速度 $\dot{e}$ に関しては、次の等方弾性体の構成則構成式を仮定する。

$$\dot{e} = \{ (1 + \nu) \dot{\sigma} - \nu (\dot{\sigma} : I) I \} / E \quad (26)$$

ここに、 E はヤング率、 ν はポアソン比、 I は単位テンソルである。

次に、拘束条件を与えるため I 及び C を仮定する。金属材料においては、散逸変形に伴う体積変化はないと仮定し、 $C=0$ とおく。また、 I は体積ひずみ方向の単位のテンソルとし、次式を仮定する。

$$I = I / \sqrt{3} \quad (27)$$

散逸関数を散逸ひずみ d のみの関数として、次式を仮定する。

$$\varphi = c_0 + c_1 \sqrt{d : d} + c_2 d : d \quad (28)$$

散逸関数が d のみの関数であるので、式(14)より、

$$\tau = \sigma \quad (29)$$

となる。

さらに、未定係数 a 、 b は、

$$a = \sqrt{\sigma : \sigma - 3p^2} \quad (30)$$

$$b = \sqrt{3} p \quad (31)$$

$$p \equiv \sigma : I / 3 \quad (32)$$

と決定される。従って、散逸ひずみ速度の方向を表す単位のテンソル n は式(15)より、

$$n = \frac{\sigma - pI}{\sqrt{\sigma : \sigma - 3p^2}} \quad (33)$$

となる。

次に、硬化・軟化則を導入するために式(23)、(24)に各値を代入すれば、 m および D が、

$$m = n \quad (34)$$

$$D = \left(\frac{c_1}{\sqrt{d : d}} + 2c_2 \right) d : n \quad (35)$$

と算定され、これを式(25)に代入すれば、散逸ひずみ速度と応力速度の関係式が得られる。

ここで定められた構成則を用いて、完全応力制御の要素試験（三軸伸張）シミュレーションを行った結果を図-2に示す。ここでは、引っ張りを正とし、解

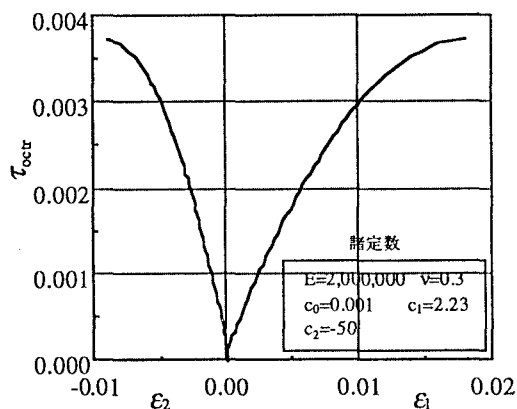


図-2 応力ひずみ曲線

析に用いた諸定数はグラフ内に示した。また、縦軸の τ_{octr} は、次式で表される無次元量である。

$$\tau_{octr} = \left\{ \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - (\sigma_1 - \sigma_2)^2} \right\} / p \quad (36)$$

図-2により、本理論が金属等を含めた一般的な材料にも適用可能であることがわかる。

4. おわりに

ここでは、構成則理論の再定式化と金属材料への簡単な応用例を示したが、今後、種々の材料への応用により本理論の有用性を確認したいと考えている。

* 参考文献

- 1) 岸野佑次：摩擦性材料の構成則の定式化，土木学会論文集，No511/III-30, 1995.3