

III-24

散逸関数を用いた構成則理論の損傷材料への応用

東北大学工学部 学生員 ○倉科 広作
 東北大学工学部 正員 岸野 佑次
 東北大学工学部 学生員 金子 賢治

1. はじめに

脆性材料が変形を受けるとき内部にクラックが発生しこれがエネルギー散逸の原因となる。ここで用いた理論は著者の一人が摩擦性材料を対象とした理論¹⁾を拡張したものであり、本研究はこの理論の損傷材料への適応について検討するために行ったものである。ここでは、損傷の程度を散逸ひずみにより表した散逸関数を用いて定式化したものでその概要を示すとともに、これを応用した簡単な例を示した。

2. 構成則の定式化

2.1 散逸変形モード

一般に、材料の非弾性挙動には、材料内部の不可逆的な微視構造変化とエネルギーの散逸がともなう。このような材料内部の散逸機構をもとに構成則を定式化する場合、何らかの散逸変形モードをモデルに組み込む必要がある。ここでは構成則の定式化に必要な変形の分解について示す。

全体のひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ を、弾性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^e$ と、散逸ひずみ速度 $\dot{d}$ と分ける。

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{d} \quad (1)$$

散逸ひずみ速度については、ひずみ速度の方向テンソルを $\mathbf{n}$ を用いて次のようにあらわす。

$$\dot{d} = \dot{\alpha} \mathbf{n} \quad (2)$$

ここに $\mathbf{n}$ は単位テンソルであり、次式を満足する。

$$\mathbf{n} : \mathbf{n} = 1 \quad (3)$$

また、 $\dot{\alpha}$ は

$$\alpha = \int \dot{\alpha} dt \quad \dot{d} = \dot{\alpha} \mathbf{n} \quad (4)$$

と定義される量であり、散逸変形の進行を表すパラメーターである。

2.2 散逸仕事と散逸条件

材料の内部応力がする仕事の中で散逸変形に対応する部分を、散逸仕事と称する。散逸仕事は次式のように与えられる。

$$\sigma : \dot{d} = \omega \dot{\alpha} \quad (5)$$

ここに

$$\omega = \sigma : \mathbf{n} \quad (6)$$

これは単位散逸ひずみあたりの仕事を表す。

散逸変形が生じる条件としては次の2つの条件を仮定する。

散逸条件 [1] ; ω が、応力状態、変形履歴、 $\mathbf{n}$ によって定まるある一定のエネルギーレベルに達していること。

散逸条件 [2] ; 条件 [1] を満たすものは $\mathbf{n}$ 以外

にはないこと。

散逸条件 [1] におけるエネルギーレベルは、次の散逸関数と呼ばれる関数により与えられると仮定する。

$$\varphi = \varphi(\mathbf{n}, d) \geq 0 \quad (\text{for } \mathbf{n} : \mathbf{n} = 1) \quad (7)$$

以上より散逸条件 [1] は散逸関数は単位の散逸ひずみを生じさせるために必要なエネルギーを表し、ここではこれが散逸ひずみの生じる方向 $\mathbf{n}$ と損傷の程度を代表する散逸ひずみ d の関数としてあらわすことにした。

$$f = \varphi - \omega = 0 \quad (\text{for } \mathbf{n} : \mathbf{n} = 1) \quad (8)$$

この様子を図-1で表す。図-1では $\mathbf{n} : \mathbf{n} = 1$ の状態では全ての $\mathbf{n}$ に対して $f > 0$ で、散逸曲面と散逸仕事面との共通点はない状態である。はじめて $f = 0$ を満たすときは φ と ω とは $\mathbf{n} : \mathbf{n} = 1$ 上で接することになる。したがって φ と ω が接する条件は f が極小として満たされるときである。

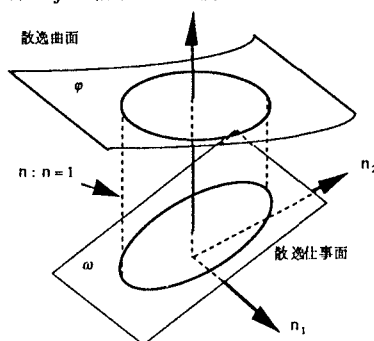


図-1 散逸関数と散逸仕事

2.3 流動則

式 (8) を満たす条件式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad F \equiv f - \frac{A}{2} \mathbf{n} : \mathbf{n} \quad (9)$$

A はラグランジュの未定係数であり、式 (9) と $\mathbf{n}$ との複内積を施せば、

$$A = \tau : \mathbf{n} \quad (10)$$

$$\tau = \sigma - \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \quad (11)$$

を得て、したがって次の流動則を得る。

$$\mathbf{n} = \frac{\tau}{\tau : \mathbf{n}} \quad (12)$$

$\varphi = \varphi(\mathbf{n}, d)$ であるので式 (11) より式 (12) は陽な式とはなっていない。式 (12) を求めるために

$$\beta = \frac{1}{\tau_{ij} n_{ij}} \quad (13)$$

と置いてみると次式を得る。

$$n_{ij} = \beta \tau_{ij} \quad (14)$$

n は $n_{ij} n_{ij} = 1$ を満たすので、式 (14) より

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\tau_{ij} \tau_{ij}}} \quad n_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{\sqrt{\tau_{kl} \tau_{kl}}} \quad (15)$$

となり方向テンソル n は求められる。

2. 4 硬化則

式 (8) を時間微分すると

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial d} : n \dot{\alpha} = 0 \quad (16)$$

より、次の硬化則を得る

$$\dot{\alpha} = \frac{m : \sigma}{D} \quad (17)$$

$$m = - \frac{\partial f}{\partial \sigma} = n \quad (18)$$

$$D = \frac{\partial f}{\partial d} : n \quad (19)$$

3. 損傷材料への応用

弾性ひずみ速度については、次の等方弾性体の構成式を仮定する。

$$\dot{\epsilon} = \{(1 + \nu) \dot{\sigma} - \nu (\dot{\sigma} : I) I\} / E \quad (20)$$

本論文ではいままで述べてきた構成則を損傷材料に応用するために (7) の散逸関数を次のように仮定した。

$$\varphi = C_0 + C_1 |n_{ij}| d_{ij} + C_2 \sqrt{n'_{ij} n'_{ij}} \sqrt{d'_{mn} d'_{mn}} \quad (21)$$

ここに、 C_0 、 C_1 、 C_2 散逸変形における散逸モードの 2 種類のタイプをは材料定数である。

上の散逸関数は散逸変形における散逸モードの 2 種類のタイプに分離表現できるように選んである。

式 (21) を使って 2. 3. 2. 4 の流動則、硬化則を展開する。

(15) より方向テンソル n_{ij} は次式のようにもとめられる。

$$n_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{\sqrt{\tau_{kl} \tau_{kl}}} \\ \tau_{ij} = \sigma_{ij} + C_1 \delta_{ij} d_{kk} \pm \frac{\sqrt{d'_{mn} d'_{mn}}}{\sqrt{\sigma'_{pq} \sigma'_{pq}}} \sigma'_{ij} \\ \tau_{ij} \tau_{ij} = \sigma_{ij}^2 + 3 C_1^2 d_{kk} + C_2 d'_{ij} + 2 C_1 \sigma_{kk} \\ \mp 2 C_1 \sigma_{kk} \pm 2 C_2 \sqrt{d'_{ij} d'_{ij}} \sqrt{\sigma'_{mn} \sigma'_{mn}} \quad (22)$$

式 (19) の D は次式のようにになる。

$$D = n_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial n_{ij}} = C_1 |n_{ij}| n_{ij} + C_2 \frac{\sqrt{n'_{ij} n'_{ij}}}{\sqrt{d'_{mn} d'_{mn}}} d'_{pq} n'_{pq} \quad (23)$$

以上より、このモデルにおいて、5つの材料定数 E 、 ν 、 C_0 、 C_1 、 C_2 を定めることにより、構成則が確定する。

ここまでで述べてきた構成則を用いて損傷材料の要素試験のシミュレーションを行った例を示す。制御方法は、平均応力一定のひずみ制御とする。表 - 1 にシミュレーションに用いた諸定数の値を示す。

図 - 2 には応力—ひずみ曲線を示しておく。

表 - 1 構成則に用いた諸定数	
弾性係数	
E :	$2.2 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ 、 ν : 0.2
散逸関数に用いた定数	
C_0 :	6.93
C_1 :	-1.5×10^2
C_2 :	1.2×10^5

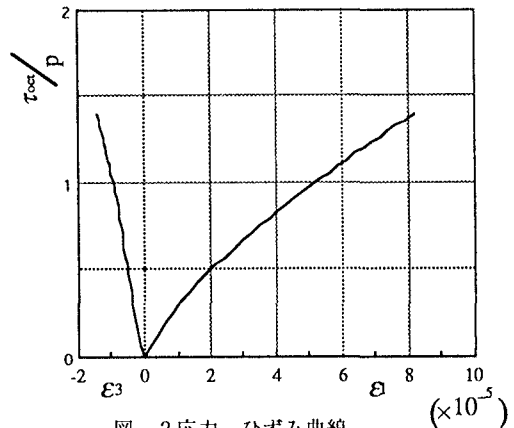


図 - 2 応力—ひずみ曲線

図 - 2 の τ_{oct} は正八体面にに作用するせん断応力

$$\tau_{oct} \equiv \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2} \quad (24)$$

で p は平均応力である。

この例においては材料の損傷が載荷当初から生じるとし、純粋な弾性変形は殆ど生じないような材料定数の設定を行った。また散逸関数は d の準線形であるので、応力、ひずみ曲線は比較的単純なカーブとなっている。

4. おわりに

ここでは損傷材料の構成則の定式化を試みたが、今後散逸関数の各項の役割についてさらに詳細な解析と考察を行いたいと思う。

参考文献：1) 岸野佑次：摩擦性材料の構成則の定式化、土木学会論文集、No511/III-30, 1995.3