Ⅲ－23

地盤材料の非対称な構成マトリックスの安定性

東北学院大学工学部土木工学科　飛田　善雄

1．地盤工学における安定性の問題の重要性

摩擦則に従い、顕著なダイレイタンシーを示す地盤材料の多くは単調載荷時の挙動は非関連流動則により比較的簡単に定式化できる．その定式化の結果として、応力増分とひずみ増分を関係付ける接線剛性マトリックスは非対称となる．剛性マトリックスが非対称となる場合には、エネルギー的な安定性の規準を無批判に利用することはできず、動的定式化も含めて安定性の問題を議論することが必要になる．現在、地盤工学の中で最も注目されている現象の多くは（例えば、液状化に伴う地盤流動）、静的平衡という観点からみると、分岐現象（例えば、せん断帯の発生など）と不安定性を伴う問題であり、分岐と安定性に対する基本的考察がなければ、数値解析により流動問題を、合理的に解くことは不可能である．このように、分岐現象と安定性を正しく議論することは、今後の地盤工学への数値解析の応用範囲を広げ、破壊現象を正しく認識するうえで重要なことの一つとなっている．詳しい数学的議論は飛田(1996)を参考にして頂くことにして、本文では、この安定性の問題を、数式を用いずに、簡潔に議論する．

2．接線剛性マトリックスが対称な力学系の安定性の問題

2階のテンソル：応力、ひずみをベクトル表記し、さらに4階のテンソルである構成テンソルをマトリックスとして表現したとき、構成式として関連流動則を用いれば、塑性負荷時の弾塑性接線剛性マトリックスは対称となる．塑性負荷時と弾性除荷時とで、相異なる挙動を示す弾塑性体の安定性の議論は、通常、塑性負荷時の（剛性の低いほうの）マトリックスを用いて、一意的応答を示す仮想的材料：線形比較体を導入して議論される．除荷であっても弾塑性応答を示すとするのであるから、線形比較体に対する安定性の条件は、弾塑性体と比較すれば、安全側に見積られることになる．以下、線形比較体を導入する場合についてのみ考察を進めていく．

構成マトリックスが対称であることが安定性の議論で極めて大事になるのは、対称性があればいわゆるポテンシャル表現が可能となるからである．応力増分が速度ポテンシャル関数の微分として定義され、外力の増分もあるポテンシャル関数の微分として定義できるような系は、解析力学の分野では、保存系と呼ばれ、その安定性の議論は確立したものとなっており、適当なポテンシャル関数、一般にはポテンシャルエネルギー関数、の第2変分が正という条件で与えられる（例えば、Lanczos(1971)）．このような保存系の場合には、安定性を議論するときに、より基本的な安定性の条件となっている動的条件（いわゆる、Liapounovの条件）は考える必要はない．なぜならば、保存系に対しては、上記の第2変分が正という条件が満足されていれば、必ず動的な安定性は満足されることが、厳密に数学的に証明されているからである、すなわち保存力学系については、エネルギー的安定性の条件は動的安定性条件の必要条件となっている（例えば、Bazant and Cedolin(1991)）．連続体力学の分野で著名な、Hillの安定性の条件：$\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}>0$はこの保存系を対象にして、導入されたものである（例えば、Hill(1978)）．いわば、解析力学の安定性の条件を、保存系という前提条件を崩さないようにして、連続体力学の安定性の条件を導いた条件といえる．このことから、Hillの安定性の条件を、保存系の前提条件が満足されない場合に無批判に適用することには問題があることが解かる．その代表的な例は、保存力ではない風荷重による吊橋の崩壊事例であり、この場合には保存系の安定性の条件は十分条件ではなく、動的安定性の研究のきっかけとなったことは良く知られていることである．構成モデルが非対称な場合も、保存系には含まれないことになり、動的安定性の条件も含めて安定性の議論を行うことが必要であることが解かる．

3．非対称な構成マトリックスをもつ力学系の安定性の条件

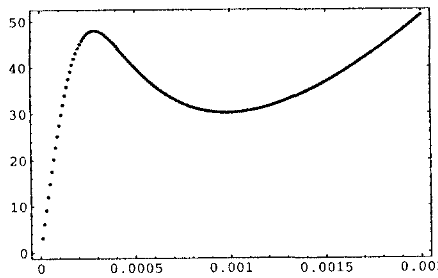
基本的には、非対称な構成マトリックスをもつ場合には、ポテンシャル関数は定義できないので、Hillの安定性の条件は、適用できないことになる．しかし、Hillの条件はこの場合には、局所的な解の唯一性の条件を保証することになり、やはり明確な力学的意味をもっている．このことは、$\dot{\sigma}_{ij}=E_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}$という線形比較体に対して、局所的な（全ての領域で）解の唯一性を保証する条件は、$\Delta\varepsilon_{ij}E_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}>0$と与えられ、この条件は$E_{ijkl}$の正値性（どんな$\Delta\varepsilon_{ij}$に対しても正値を持つ性質）によって保証される．このことより、Hill の条件:$\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}>0$は満足されていることが解かる．なお、この正値性は、Eの対称化されたマトリックスE^sの最小固有値$\lambda_{min}>0$の条件によって保証されることになる．非対称な構成マトリックスをもつ場合には、より基本的な安定性の条件である動的安定性の条件を議論することが必要になる．静的平衡状態の動的安定性の条件は、与えられた静的平衡状態に微小な擾乱を与え、

その応答に対して動的定式化を行い、その擾乱による結果としての応答が成長できるかどうかを検討するものである．一般的には、線形応答として運動のモードを仮定し時間と共に発展する条件（$e^{\lambda t}$という時間依存性を仮定する）が満足されるか否かを、固有値問題と解くことになる．その結果、λが正あるいは複素数となるとき、安定性の条件は満足されないことになる（より詳しい議論は飛田(1996)あるいは、Leroy(1991)）．固有値が複素数となる場合を、フラッタータイプの不安定と呼んでいる．この解析では、動的応答では極めて大事な、減衰項は含めずに計算は進められること、さらに弾塑性体の様に除荷時には、安定性が保証される弾性変形をする場合には、線形比較体を用いた安定性の計算は、常に安全側の結果となることには注意が必要である．

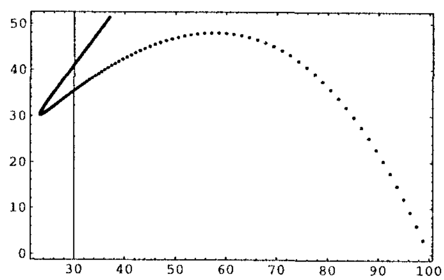
エネルギー的安定性の条件、動的安定性の条件両者ともに、数学的には固有値問題に帰着できる．固有値問題といっても、固有ベクトルは必要なく、また全ての固有値が必要となるわけではないので、かなり簡単化した計算で安定性の検討が可能となる．

4．非関連流動則による安定性の議論

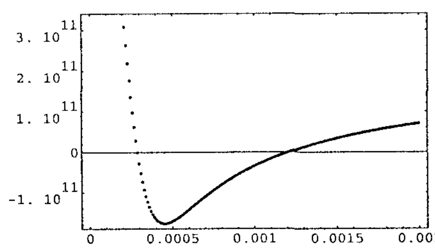
非対称な構成モデルの最も簡単なものは、非関連流動則（塑性を支配する負荷条件と塑性ポテンシャルが一致しない）によって与えられる．このモデルに対して（モデルの詳細については割愛する、非関連の数学的構造についてはBigoni and Heuckel(1991)が詳しい）、Mathematicaを利用してその安定性を検討している．非関連流動則の場合には、その構成マトリックスは、マトリックスとしては特異な形をしており、排水変形に対して、安定性の動的定式化を行うと、局所的にはひずみ硬化状態では、その固有値は負になるず、さらに複素数にもならないことが知られている（これは、計算結果でもそうなっている）．一方、対称化されたE^sの最小固有値は、ひずみ硬化過程で負となる．この結果から間違いなく言えることは、非関連モデルの場合には、ひずみ硬化過程で、局所的な解の唯一性が失われ、分岐現象が発生する可能性があること、さらに動的な安定性は、応力比・ひずみ関係のピークまでは保たれることの二つである．非排水条件に対する計算例を図1に示す．非排水条件の計算では、安定性の議論はさらに複雑になり、一端安定性が失われて、正のダイレイタンシーの発生と共に再び安定性が保証されるという結果になっている．パラメータの設定によっては、全く安定性を失わない場合（密な砂に相当する）、剛性回復が全く起こらない場合などの計算結果も再現されている．計算結果の合理的解釈には、現在検討中である．なお非排水3軸の安定性については、Vardoulakis and Sulem(1995)が詳しい．



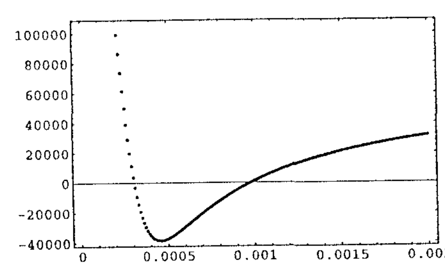
(a) せん断応力－軸ひずみ関係



(b)せん断応力－平均有効応力関係



(c)対称化された接線剛性マトリックスの行列式と軸ひずみの関係(Hillの条件)



(d)接線剛性マトリックスの最小固有値と軸ひずみの関係（動的安定性の条件）

図1：3軸非排水試験のMathematicaによる計算例

参考文献

Bazant and Cedolin(1991):Stability of Structures, Oxford Univ, Bigoni and Heuckel(1991): Int.J. Solids Struct. 28(2), pp.147-180 Lanczos(1986):Variational principles of mechanics, Dover Pub., Leroy(1991) Int.J.Solids Struct. 27(6), pp.781- 808 飛田(1996):構造工学論文集、Vol.42A（印刷中） Vardolakis and Sulem(1995):Bifurcation Analysis in geomechanics, Blackie Academic & Professional