Ⅲ－20

粒状体の３次元離散力学と間隙セルについて

東北学院大学大学院　学生員　○相澤　亮
東北学院大学工学部　正会員　佐武　正雄

１．まえがき

２Ｄの粒状体（粒子集合体）を観察すると，粒子，接触（点），間隙の３要素から成り立っている．粒子グラフにおいて，これらに対応する３要素は点，枝，ループである．これらの要素について，力，変形を表す力学量を考え，粒状体の離散力学を構成することができる．この粒状体の離散解析を３Ｄに拡張すると，粒子グラフにおいて，ループの他に間隙セルが付加される．間隙セルを間隙の一つの単位と考え，３Ｄの離散力学を構成する．また３Ｄにおいて新たに加わる要素の，間隙セルの性質について考察する．

２．３Ｄ粒状体の離散力学

粒状体の力学において，通常は粒子と接触点においてのみ力学量を考えるが，粒状体における力学的双対性を考慮し，間隙にも新たに力学量を導入する．最も一般的な場合を考え，また記述を簡単にするため，ベクトル的表現を用いる．３Ｄの粒子集合における力は，接触面（ループ）を通して粒子と粒子の間で伝達されると考えられ，２Ｄの場合と同様に，３Ｄの力学量を 表-1 に示ことができる．ループで囲まれた間隙セルを考えることにより，これらの力学量の間には，新たに間隙接触に対する力学量を考える．添字 P, C, D, V は，それぞれ粒子，粒子接触，間隙接触，間隙に対する指標である．

表-1の力学量の間には次式の関係が成り立つ．

$$\boldsymbol{F}_P = -\tilde{D}_{PC}\boldsymbol{F}_C\ ,\qquad \boldsymbol{U}_C = -\tilde{D}_{CP}\boldsymbol{U}_P \tag{1}$$

$$\boldsymbol{F}_C = -\tilde{L}_{CD}\boldsymbol{F}_D\ ,\qquad \boldsymbol{U}_V = -\tilde{L}_{DC}\boldsymbol{U}_C \tag{2}$$

$$\boldsymbol{F}_C = -\tilde{C}_{DV}\boldsymbol{F}_V\ ,\qquad \boldsymbol{U}_V = -\tilde{C}_{VD}\boldsymbol{U}_D \tag{3}$$

ここに $\tilde{C}_{DV}$ は，$\tilde{D}_{PC}$, $\tilde{L}_{CD}$ と同様に，拡張したセルマトリックスであり，繰り返される指標については和をとるものとする．基本マトリックスの間には，恒等式

$$\tilde{L}_{CD}\tilde{C}_{DV} = 0\quad ,\qquad \tilde{C}_{VD}\tilde{L}_{DC} = 0 \tag{4}$$

が成り立つ．

これらの式により 表-2 が導かれる．３Ｄにおいては（粒子）接触の力学量に対して間隙接触（ループ）の力学量が直接関係し，間隙の力学量は間接的に関係していることが分かる．

表-1　３Ｄ離散力学の力学量

	粒　子 （P）	粒子接触 （C）	間隙接触 （D）	間　隙 （V）
力 モーメント $\begin{pmatrix} f \\ m \end{pmatrix} = \boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}_P$	$\boldsymbol{F}_C$	$\boldsymbol{F}_D$	$\boldsymbol{F}_V$
変　位 回　転 $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \boldsymbol{U}$	$\boldsymbol{U}_P$	$\boldsymbol{U}_C$	$\boldsymbol{U}_D$	$\boldsymbol{U}_V$

表-2　３Ｄ力学量の関係式

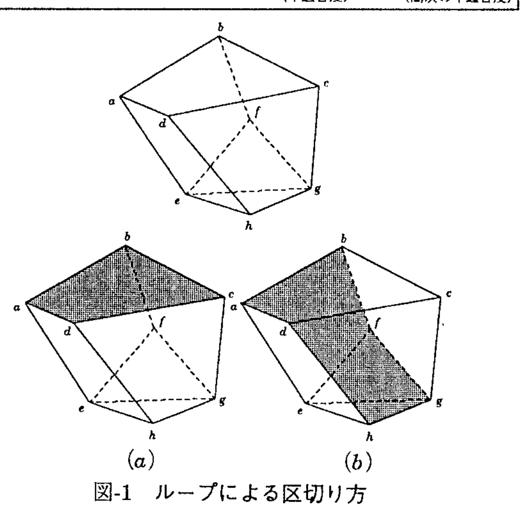
$\boldsymbol{F}_P$	⬅	$\boldsymbol{F}_C$	⬅	$\boldsymbol{F}_D$	⬅	$\boldsymbol{F}_V$

$\boldsymbol{F}_P = -\tilde{D}_{PC}\boldsymbol{F}_C$
$\boldsymbol{F}_P = 0\ (\tilde{D}_{PC}\boldsymbol{F}_C = 0) \Leftrightarrow \boldsymbol{F}_C = -\tilde{L}_{CD}\boldsymbol{F}_D$
$\boldsymbol{F}_C = 0\ (\tilde{L}_{CD}\boldsymbol{F}_D = 0) \Leftrightarrow \boldsymbol{F}_D = -\tilde{C}_{DV}\boldsymbol{F}_V$

$\boldsymbol{U}_V$	⬅	$\boldsymbol{U}_D$	⬅	$\boldsymbol{U}_C$	⬅	$\boldsymbol{U}_P$

$\boldsymbol{U}_V = -\tilde{C}_{VD}\boldsymbol{U}_D$
$\boldsymbol{U}_V = 0\ (\tilde{C}_{VD}\boldsymbol{U}_D = 0) \Leftrightarrow \boldsymbol{U}_D = -\tilde{L}_{DC}\boldsymbol{U}_C$
$\boldsymbol{U}_D = 0\ (\tilde{L}_{DC}\boldsymbol{U}_C = 0) \Leftrightarrow \boldsymbol{U}_C = -\tilde{D}_{CP}\boldsymbol{U}_P$

$\boldsymbol{F}_P$	⬅	$\boldsymbol{F}_C$	⬅	$\boldsymbol{F}_D$ （応力関数）	⬅	$\boldsymbol{F}_V$ （高次の応力関数）
$\boldsymbol{U}_P$	➡	$\boldsymbol{U}_C$	➡	$\boldsymbol{U}_D$ （不適合度）	➡	$\boldsymbol{U}_V$ （高次の不適合度）



(a)　(b)

図-1　ループによる区切り方

３．粒状体の間隙セルに関する考察

粒状体の間隙は全部連結しているため，間隙セルをつくり区切る方法は，ループのとり方によって一

意的ではない．そのため，まだ研究すべき点が多い．しかし，粒状体の３Ｄ離散力学では，ループの力学量が直接関係しているため，間隙セルのつくり方は重要と思われる．そこで間隙セルをつくるための条件について考察する．また，セルを分解すると，四面体より細かく分解はできない．この四面体を基本セルという．

（１）３Ｄ粒状体の間隙は全部連結しているため，間隙セルの分割の仕方は，ループの見方によって様々である．例えば，図-1 のような部分を考えると，ループによる区切り方は，図-(*a*) のようなループ（*a*-*b*-*c*-*d*）で区切る見方，また図-(*b*) のようにループ（*a*-*b*-*f*-*g*-*h*-*d*）で区切るような見方もあり，３Ｄ粒状体の間隙の単位である間隙セルの決定は一意的にはできない．

（２）大小２種類の球を用いて，３Ｄ粒子集合体（図-2）をつくり考察した．仮枝を考えて基本セルに分割してみると，球の大きさや接触の仕方などにより，基本セルの種類は，表-3 に示すようになる．

（３）基本セルを寄せ集めて，間隙セルをつくる方法を考えてみる．仮枝を含まない基本セルはそのまま単独のセルとなるので，他の基本セルとは連結させずに間隙セルとして構成することができる．しかし仮枝を含む基本セルについては，基本セルをいくつか連結させてゆき，間隙セルを決定する．基本セルを連結させた場合に，次に示すような条件でループを選定する．

① 仮枝が枝で囲まれているループをつくる．

② 仮枝を挟んだ面と面のなす角が180度に近くなるようなループをつくる．

この２つの条件によって，ループが確定し間隙セルを構成することができる．

（４）間隙セルが決定すると，はじめて間隙グラフが確定し，粒子グラフとの双対性を確定することができる（このグラフの確定が離散力学の基本と考えられる）．

以上のような方法で，図-2 に示すような粒子集合体について考察した．

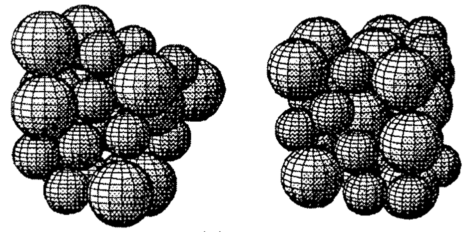
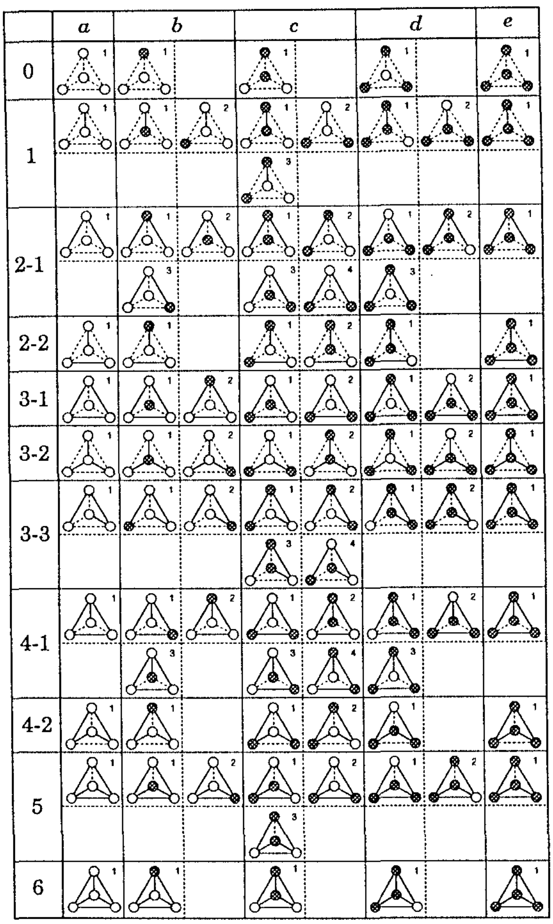


図-2

表-3　基本セルの種類



４．あとがき

本文は，粒状体の２Ｄ離散解析を３Ｄに拡張し，３Ｄにおける離散力学の構成について説明した．また３Ｄの離散力学において重要な役割をもつ間隙セル，とくにその定め方について考察した．間隙セルは，仮枝を考えると規則的な分類ができるので，この方向で今後さらに研究を進めたいと思っている．

［参考文献］

1. M.Satake, A discrete-mechanical approach to granular materials, Int.J.Engng.Sci Vol.30 No.10 pp1525-1533,1992
2. M.Satake, Discrete-mechanical approach to granular media, Powder8 & Grains 93 (edit.C.Thornton) A.A.Balkema, pp3-9, 1993