

## II - 44

## 氾濫計算を安定に行うための先端条件

東北大学大学院 学生員 ○今津 雄吾  
 東北大学工学部 正 員 今村 文彦  
 東北大学工学部 正 員 首藤 伸夫

## 1. はじめに

河川氾濫の非定常数値解析を安定に行うためには、波動方程式に対する C.F.L. 条件に加えて、移動境界である流れ先端部での安定条件が必要であり、水深が小さい地点においてある程度の大きさの水深で代用する仮想水深法、あるいは水深を零と見なして計算を実行しない打ち切り水深法が用いられている。しかし、計算の安定性の観点からこれらの水深を決定する基準は与えられておらず、理論的根拠の乏しい経験的な値を用いているのが現状である。そこで、仮想水深や打ち切り水深の最適値を推定するために、1次元のモデル水路で数値計算を行って発散のメカニズムについて考察した。

## 2. Leap-Frog 法による数値計算法

氾濫計算には、浅水理論式を Leap-Frog 法により差分化して用いられるが、その運動方程式（ $x$  方向）は次のようになる。

$$M(k+1) = \frac{1}{1+FF} \left\{ (1-FF)M(k) - \Delta t \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{M^2(k)}{D(k)} \right) - \Delta t \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{M(k)N(k)}{D(k)} \right) - \Delta t g D(k) \frac{\partial \eta(k)}{\partial x} \right\} \quad (1)$$

ただし

$$FF = \frac{1}{2} \frac{g n^2 \Delta t}{D(k)^{7/3}} \sqrt{M(k)^2 + N(k)^2} \dots\dots\dots (2)$$

$M, N$ :  $x, y$  方向の流量 Flux,  $D$ : 全水深,  $\eta$ : 水位+地盤高さ

$k$ : 時間ステップ,  $n$ : Manning の粗度係数,  $g$ : 重力加速度

移流項は安定のため風上差分を用いている。また、 $FF$  は摩擦項の差分に伴い生じた係数である。 $FF$ （摩擦項）及び移流項の計算において  $D$ （全水深）で除する演算を行うため、水の先端などで微小な  $D$  が発生すると摩擦項や移流項が極端に大きくなり、このスキーム自体は安定であっても、発散する可能性がある。

## 3. 発散例の考察

一様勾配の水路に上流側境界に 1m の水位を与えて水を流した。水が下流に到達する前に発散が起こったケースとして、仮想水深 ( $\Delta h_a$ ) =  $1.0 \times 10^{-5}$  m、打ち切り水深 ( $\Delta h_c$ ) =  $1.0 \times 10^{-7}$  m、勾配 ( $i$ ) = 0.1 の場合を示す。図 1 は、発散直前（計算開始後 44 秒）での運動方程式中の各項の大きさを比較したものである。これを見ると移流項が振動を起こして、極端に値が大きくなり発散していることが分かる。逆に、摩擦項は最も安定している。しかし、図 2 の様に  $FF$  のみを出力すると、移流項が振動を起こす前 ( $t=36$  sec) から水の先端で大きな値が現れていることが分かる。増幅率として  $M(k)$  の係数  $\alpha = (1-FF)/(1+FF)$  を考えた場合には、必ず  $|\alpha| \leq 1$  となるので、この項が直接発散することはない。しかし、 $1-FF$  が負になると次ステップでの  $M$  の符号が変わり、物理的に考えて明らかに正しくない。さらに、次ステップで移流項を計算するときには、 $M$  の誤差は 2 乗に増幅される。また、移流項は空間微分であり、差分化すると

$$\frac{1}{\Delta x} \left( \frac{M_i^2}{D_i} - \frac{M_{i-1}^2}{D_{i-1}} \right)$$

となる。従って、前後のメッシュで  $M$  の値が極端に異なると、発散につながると考えられる。

4. 安定理論とその適用

発散を防ぎ物理的に意味のある計算を行うための1つの条件として、少なくとも  $1 - FF > 0$  である必要がある。これを満たすための  $D$  の条件は、 $M = uD$  とし、Manning の流速公式を代入すると得られる。それを  $D = \Delta h_a$  と仮想水深に置き換えると

$$\Delta h_a > \left( \frac{\Delta t}{2} g n i^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \dots\dots\dots (3)$$

となる。上式に前例の計算条件 ( $n = 0.03, i = 0.1, \Delta t = 0.2\text{sec}$ ) を代入すると  $D > 8.8 \times 10^{-4}\text{m}$  となる。この条件を満たすものとして次の3ケースで数値実験を行った。

|                                                           | $\Delta h_a(\text{m})$ | 結果 |
|-----------------------------------------------------------|------------------------|----|
| case 1                                                    | $1.0 \times 10^{-3}$   | 発散 |
| case 2                                                    | $1.0 \times 10^{-2}$   | 発散 |
| case 3                                                    | $4.0 \times 10^{-1}$   | 安定 |
| いずれも $i = 0.1, \Delta h_c = 1.0 \times 10^{-7}(\text{m})$ |                        |    |

図3は、各ケースについて、計算中に発生した  $FF$  の最大値を時間ステップごとに示したものである。ケース1では開始直後から、 $FF > 1$  となり不安定を起こしている。ケース2では  $FF > 1$  にはなっていないが、値が振動していて不安定であり、最終的には発散している。ケース3では  $FF$  が小さく極めて安定と言えるが、1m の水位に対して仮想水深に40cm という値を用いているので、計算誤差を考えると非実用的である。

従って、基本的には  $1 - FF > 0$  であれば発散は生じないはずであるが、必ずしも簡単ではないことが上記の例からわかる。数値例を増やし、実用的な条件を見出さなくてはならない。

5. まとめ

- (1) 水の先端で微小な水深が発生すると、まず  $D^{-7/3}$  の計算を含む  $FF$  が増大するが、直接発散を起こすのは移流項である。
- (2) 発散を防ぐには、 $FF$  の増大だけでなく、その振動をも防がなければならない。

参考文献  
 1) 後藤智明・小川由信 (1982): Leap-frog 法を用いた津波の計算法, 東北大学土木工学科, 52p.

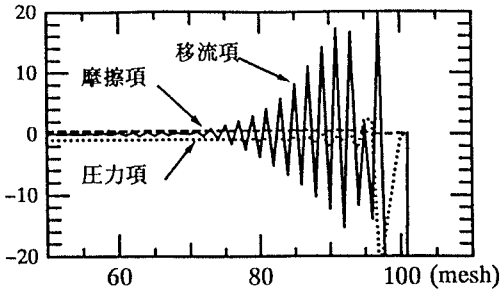


図1 各項の大きさの比較 t=44(sec)

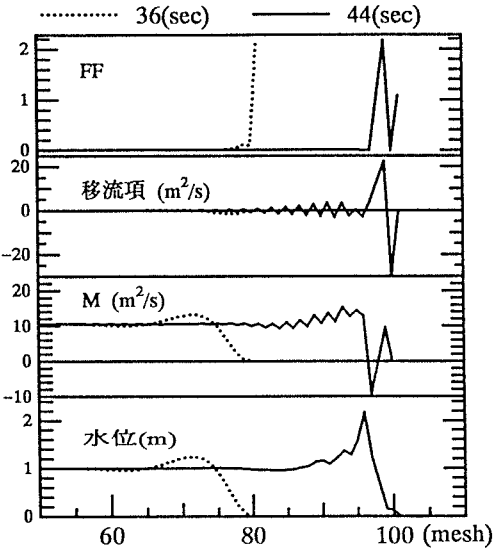


図2 摩擦項と移流項

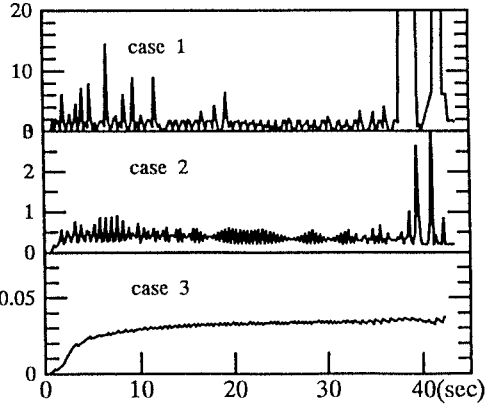


図3 計算中に現れるFFの最大値