

II-28

二層流における表面波と界面波

東北大学工学部 学生員 ○松本 智裕
東北大学工学部 正 員 今村 文彦
東北大学工学部 正 員 首藤 伸夫

1. はじめに

沿岸水域では、温度や塩分濃度の違いにより密度の異なる成層構造があり、流況や水質を支配する要因である。このような成層流に関しては、過去に実測や室内実験により、複雑な現象が解明されつつある。本研究では、長は近似が成立する場合の二層流に関して解析的な作業を行い、実際に適用できる数値モデルを提案する。

2. 長波近似による二層流の支配方程式

上層、下層にたいして、Navier-Stokes方程式を各層毎に積分する。この際に、長波近似により鉛直加速度をゼロとし、境界での運動学的・力学的条件を取り入れると、次式を求めることが出来る

(上層)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta_1 - \eta_2) + \frac{\partial M_1}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial t} + \frac{\partial(M_1^2/D_1)}{\partial x} + gD_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

(下層)

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \frac{\partial M_2}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial t} + \frac{\partial(M_2^2/D_2)}{\partial x} + gD_2 \left\{ \alpha \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial \eta_2}{\partial x} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \right\} = 0$$

(但し、 M_1, M_2 は上層、下層の流量フラックス、 $\alpha = \rho_1/\rho_2, D_1 = H_1 \cdot \eta_1 - \eta_2, D_2 = H_2 \cdot \eta_2$)

上式は、非線形項及び層間の相互作用を全く消去していない。

3. 線形理論解

(1),(2)式を直接解析的に取り扱うことは難しいため、線形近似の仮説を設ける。さらに、各層の水深を一定とすると次式を求めることが出来る。

(上層)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta_1 - \eta_2) + \frac{\partial M_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial M_1}{\partial t} + gh_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

(下層)

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \frac{\partial M_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial M_2}{\partial t} + gh_2 \{ (1-\alpha) \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \} = 0 \quad (4)$$

上式はFourier変換を用いて容易に解析解を求めることが出来る。今、初期条件として。上層に波数 k 、振幅 a_1 の周期解を仮定すると、界面波の解は

$$\eta_2 = \frac{gh_2 \alpha a_1}{c_2^2 - c_1^2} \times e^{ik(x-c_1t)} + \frac{gh_2 \alpha a_1}{2c_2(c_2 - c_1)} e^{ik(x-c_1t)} + \frac{gh_2 \alpha a_1}{2c_2(c_2 + c_1)} e^{ik(x+c_1t)}$$

となる。ここで、表面波・界面波の波速 c_1, c_2 は、

$$c_1 = \sqrt{gh_1(1+\alpha\beta)}, c_2 = \sqrt{gh_2(1-\alpha)/(1+\alpha\beta)}$$

(但し、 $\beta = h_2/h_1$)

となる。上式は3つの波成分の合成したものであり、第1成分は表面波の影響によるもの、第2成分、第3成分は界面の進行波、後退波成分である。図-2は例として3成分を合成したものの、図-3は α, β がそれぞれ界面波にどのような影響を及ぼすかを示している。 α は相対密度比であり、値が大きくなるにつれ、上層圧力の影響が増加する。また、 β は下層に対する相対水深比であり、この値も大きくなるにつれ上層圧力が増加することが、わかる。

4. 数値モデル

線形の二層流方程式を、中央差分法であるStaggered leap-frog法により離散化した。従来からある長波数値モデルとの適合性を考え、この計算法を選んでいる。以下に差分式を示す。

(上層)

$$\frac{\eta_{1,j}^{n+1/2} - \eta_{1,j}^{n-1/2} - \eta_{2,j}^{n+1/2} + \eta_{2,j}^{n-1/2}}{\Delta t} + \frac{M_{1,j+1/2}^n - M_{1,j-1/2}^n}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\eta_{2,j}^{n+1/2} + \eta_{2,j}^{n-1/2}}{\Delta t} + \frac{M_{2,j+1/2}^n - M_{2,j-1/2}^n}{\Delta x} = 0$$

(下層)

$$\frac{M_{1,j+1/2}^n - M_{1,j-1/2}^n}{\Delta t} + gh_1 \frac{\eta_{1,j}^{n-1/2} - \eta_{1,j}^{n-3/2}}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{M_{2,j+1/2}^n - M_{2,j-1/2}^n}{\Delta t} + gh_2 \frac{\alpha(\eta_{1,j+1}^{n-1/2} - \eta_{1,j}^{n-1/2}) + (1-\alpha)(\eta_{2,j+1}^{n-1/2} - \eta_{2,j}^{n-1/2})}{\Delta x} = 0$$

5. 理論解と数値モデルの結果の比較

ここでは、数値計算モデルの妥当性を検証するために、線形解との比較を行う。数値計算では境界条件（自由透過、周期性）を適切に設定することが困難であるが、ここでは、特性曲線法による自由透過法を利用している。図-4に理論解と数値モデル結果を比較する。境界付近で特性曲線法における伝播速度に見積もりがまだ十分でなく、計算値の方が若干小さい値が出ているが、全体では数値計算結果は理論解を良好に再現出来ていると思われる。

6. 閉鎖性領域での界面波の挙動

最後に、鉛直壁を右境界にもつ数値計算例を図-5に示す。左から入射した表面波・界面波は、波高は違うもののほぼ同位相で伝播し、鉛直壁で反射している。その後、反射波が逆に左境界へ戻っていく様子がわかる。計算は安定しており、本数値モデルを用いれば、複雑な地形を持つ実際の成層流を解析できるとと思われる。

7. おわりに

長波近似を仮定した2層流の基礎式を導いた。また、これを支配方程式とした数値でモデルを開発し、線形理論解との比較により妥当性を示した。今後、閉鎖性湾や河口での成層流を解析する予定である。

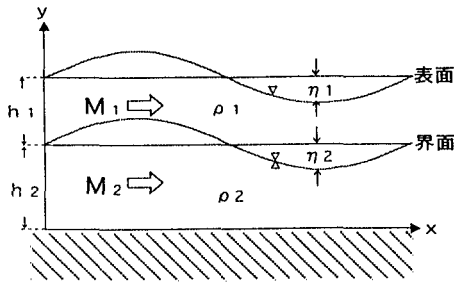


図-1 二層流の断面図

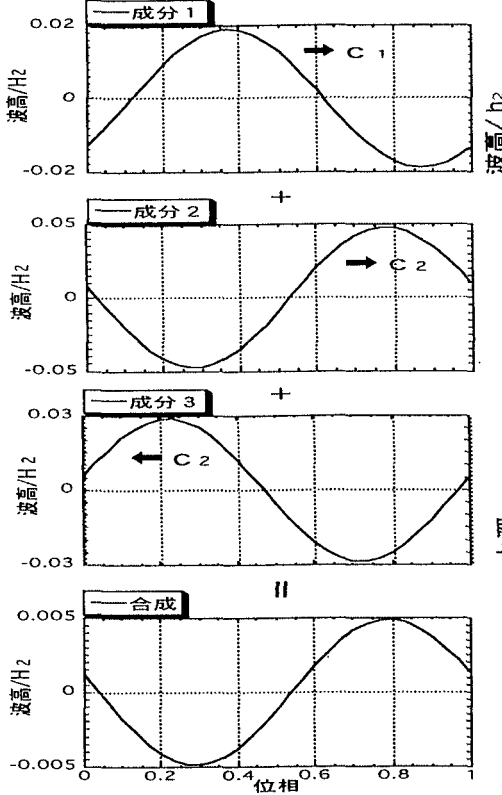


図-2 界面波の理論解の3成分の合成

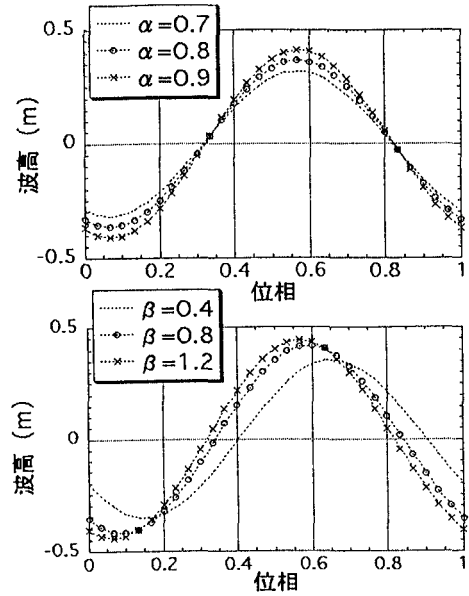


図-3 α, β の影響による
界面波の変化

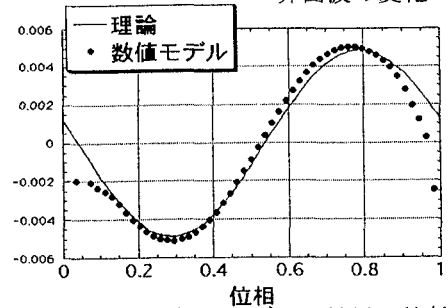


図-4 理論解と数値モデルの結果の比較

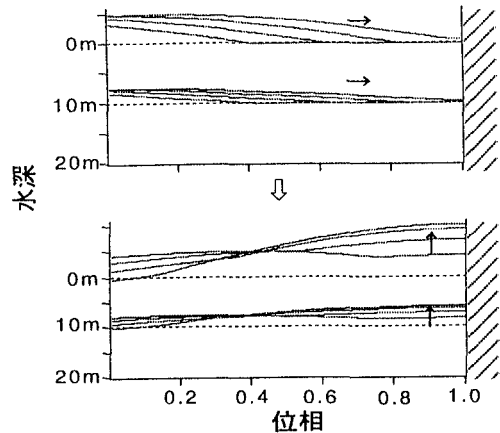


図-5 閉鎖領域における二層流の挙動