

I-23

ハイブリッド法による平面骨組構造解析

岩手大学工学部 学生員 ○水口 賢・段 梅

岩手大学工学部 正 員 宮本 裕

岩手大学工学部 正 員 岩崎 正二・出戸 秀明

1. まえがき

有限要素法は、航空機の翼の強度計算において、連続な板を小さな三角形の板の集まりとみなして、各三角形板の特性を簡単な数式で近似し、それを総合して全体的な方程式を作り、コンピュータを利用して解析されたのが始まりである。そして、偏微分方程式の近似的解法として発展してゆき、土木工学等の広い分野に応用され、構造解析の有力な手段の1つとして確立されている。

その中で、板と殻の変形問題を解決するために、1964年に変位型有限要素法と応力法の間位置しているハイブリッド法が、新しい数値解析手法として誕生した。この方法は、有限要素法のいくつか解きにくい複雑な問題に対し、変位型有限要素法に比べてより精度の高い解を得ることができる。

本研究ではこのハイブリッド法により、パーソナルコンピュータを用いてラーメンやトラス等の平面骨組構造について構造解析を行ったので報告したい。

2. 解析方法

ハイブリッド法は、コンプリメンタリエネルギーを一般化した汎関数を用いて、要素の剛性マトリックスを導く方法である。応力あるいは変位関数が、要素境界領域がある場合にも、全体におけるポテンシャルエネルギー表示に適用する事が出来る。

力学的境界条件及び幾何学的境界条件のいずれも含まない要素についての汎関数は次式で与えられる。

$$\Pi_c^m = \frac{1}{2} \{ \sigma \}^T [D]^{-1} \{ \sigma \} dV - \int_S \{ p \}^T \{ \tilde{u} \} dS \quad (1)$$

ここで $\tilde{S}$ は要素間境界を表す。この方法では要素内部の応力 $\{ \sigma \}$ を一般化された変数 $\{ \beta \}$ で表し、要素間境界における変位 $\{ \tilde{u} \}$ を節点変位を用いて次のように補間する。

$$\{ \sigma \} = [z] \{ \beta \}, \quad \{ \tilde{u} \} = [N] \{ \delta \} \quad (2)$$

この応力状態に等価な要素境界における力 $\{ p \}$ は次のように表す。

$$\{ p \} = [L] \{ \beta \} \quad (3)$$

本研究では、図-1に示すような平面骨組構造を取り扱う。その際 $\{ p \}$ 、 $\{ u \}$ は以下になる。

$$\{ p \} = [N, S, M, N, S, M]^T, \quad \{ \tilde{u} \} = [u, v, \theta, u, v, \theta]^T \quad (4)$$

式(2)、(3)を式(1)に代入すると次式が得られる。

$$\Pi_c^m = \frac{1}{2} \{ \beta \}^T [h] \{ \beta \} dV - \{ \beta \}^T \{ t \} \{ \delta \} \quad (5)$$

ここで、

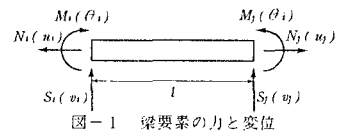
$$[h] = \int_V \{ z \}^T [D]^{-1} \{ z \} dV, \quad [t] = \int_S \{ L \}^T [N] dS \quad (6)$$

式(5)を $\{ \beta \}$ について変分を取ると次のようになる。

$$\delta \Pi_c^m = \delta \{ \beta \}^T ([h] \{ \beta \} - \{ t \} \{ \delta \}) \quad (7)$$

式(7)を $\delta \Pi_c^m = 0$ の条件より、 $\{ \beta \}$ について解くと次式が得られる。

$$\{ \beta \} = [h]^{-1} [t] \{ \delta \} \quad (8)$$



式(8)を式(5)に代入することにより次式が得られる。

$$\prod_c^m = \frac{1}{2} [\delta]^T [k]^{-1} [\delta] \quad (9)$$

ここで $[k]$ はハイブリッド法より導かれる剛性マトリックスであり、次の通りである。

$$[k] = [t]^T [h]^{-1} [t] \quad (10)$$

3. 数値計算例

本研究のハイブリッド法を用いて、以下に示す連続梁やトラス及びラーメン構造について計算を行い、剛性マトリックス法等の他解法と比較した結果を表-1から表-3に示す。

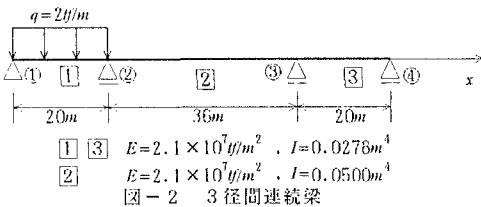


表-1 3径間連続梁の要素モーメント

節点番号	理論値	ハイブリッド法
1	0.000000E+00	0.000000E+00
2	-5.331485E+01	-5.331485E+01
3	1.333414E+01	1.333404E+01

表-2 不静定トラスの変位と軸力

節点	節点 X 方向変位 (cm)		要素	要素軸力 (N)	
番号	剛性マトリクス法	ハイブリッド法	番号	剛性マトリクス法	ハイブリッド法
1	0.00E+00	0.000000E+00	1	4.498952E+04	4.498948E+04
2	8.65E-02	8.651962E-02	2	3.113064E+04	3.113004E+04
3	2.40E-02	2.399439E-02	3	2.612159E+04	2.612164E+04
4	5.48E-02	5.478860E-02	4	-3.998047E+04	-3.998109E+04
5	5.36E-02	5.364205E-02	5	-8.127037E+03	-8.127003E+03
6	6.78E-02	6.757358E-02	6	1.002161E+04	1.002115E+04
			7	1.707738E+04	1.707811E+04
			8	-6.172315E+03	-6.171540E+03
			9	2.360651E+04	2.360607E+04
			10	-4.254743E+04	-4.254746E+04

節点	節点 Y 方向変位 (cm)	
番号	剛性マトリクス法	ハイブリッド法
1	0.00E+00	0.000000E+00
2	-7.48E-02	-7.474526E-02
3	9.19E-02	9.192439E-02
4	-4.90E-02	-4.895848E-02
5	-8.94E-02	-8.942604E-02
6	0.00E+00	0.000000E+00

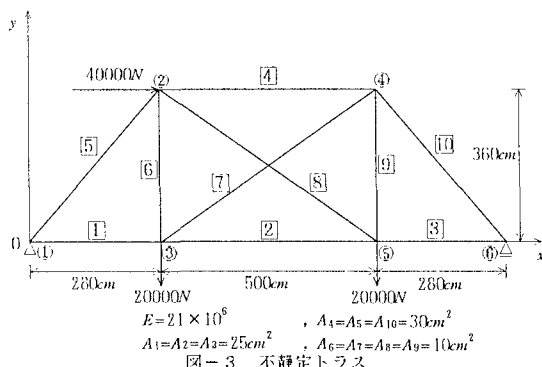
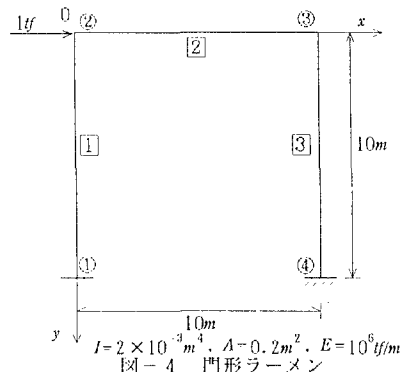


表-3 門形ラーメンの変位、軸力及びモーメント

節点		節点X方向変位(cm)			節点たわみ角		
番号	理論値	剛性マトリクス法	ハイブリッド法	理論値	剛性マトリクス法	ハイブリッド法	
1	1.917084E-03	1.9171E-03	1.917088E-03	2.906276E-04	2.9063E-04	2.906281E-04	
2	1.907102E-03	1.9071E-03	1.907106E-03	2.881322E-04	2.8813E-04	2.881328E-04	

要素		要素左端軸力(tF)			要素右端軸力(tF)		
番号	理論値	剛性マトリクス法	ハイブリッド法	理論値	剛性マトリクス法	ハイブリッド法	
1	-4.276550E-01	-4.2766E-01	-4.276559E-01	4.276550E-01	4.2766E-01	4.276559E-01	
2	4.990643E-01	4.9906E-01	4.990686E-01	-4.990643E-01	-4.9906E-01	-4.990686E-01	
3	4.276550E-01	4.2766E-01	4.276562E-01	-4.276550E-01	-4.2766E-01	-4.276562E-01	

要素		要素左端モーメント(tF・m)			要素右端モーメント(tF・m)		
番号	理論値	剛性マトリクス法	ハイブリッド法	理論値	剛性マトリクス法	ハイブリッド法	
1	-1.147185E+00	-1.1472E+00	-1.147188E+00	-8.565577E-01	-8.5656E-01	-8.565601E-01	
2	8.565577E-01	8.5656E-01	8.565597E-01	8.540624E-01	8.5407E-01	8.540641E-01	
3	-8.540624E-01	-8.5407E-01	-8.540642E-01	-1.142195E+00	-1.1422E+00	-1.142198E+00	



4. あとがき

表-1から表-3より、ハイブリッド法により構造解析をした結果を、剛性マトリックス法による結果と比較すると、ほぼ同精度の解を得ることが出来た。本研究では簡単な平面骨組構造の解析について行ったが、複雑な構造になるほど本手法を用いると、比較的簡単に精度の良い解を得る事が出来ると思われるので、今後それらの問題についても検討したい。