

境界帯板法によるライスナー・ミンドリン矩形板の応力解析

岩手大学工学部 正 員 岩崎正二 宮本 裕 出戸秀明
 岩手大学工学部 学生員○呂 杰 馬 国偉

1. まえがき

本研究は、有限帯板法（FSM）の考え方と境界積分方程式法の手法を組み合わせた境界帯板法（Boundary Strip Method）によるライスナー・ミンドリン矩形板の応力解析を試みたものである。この解析方法の特徴は、たわみの変位関数として一方向の境界条件を満足する級数を用いてライスナー・ミンドリン板の力のつり合い方程式を次元問題に還元し、残りの方向に対して境界積分方程式法（境界要素法）に基づく定式化を行なうものである。本解法に基づいた数値解析例を示し、有限帯板法、厳密解（級数解法）¹⁾等の他の解法と比較検討することより、本解法が中厚矩形板の応力解析に対して有効であることを明らかにした。

2. 解析理論

図-1に示すように長さが l , l , 厚さ h の曲げを受ける矩形板を考え、 z , x , y 方向の力とモーメントのつり合い式にそれぞれ基本解 w_n^* , θ_n^* , θ_n^* を乗じて、 y 方向の $0 \sim l$ 間で積分する。

$$\begin{aligned} \int_0^l \left(\frac{\partial Q_y}{\partial x} + \frac{\partial Q_z}{\partial y} + q_y \right) w_n^*(y, \xi) dy &= 0 \\ \int_0^l \left(Q_y - \frac{\partial M_x}{\partial y} - \frac{\partial M_z}{\partial x} + q_y \right) \theta_n^*(y, \xi) dy &= 0 \\ \int_0^l \left(Q_z - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_z}{\partial y} + q_z \right) \theta_n^*(y, \xi) dy &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

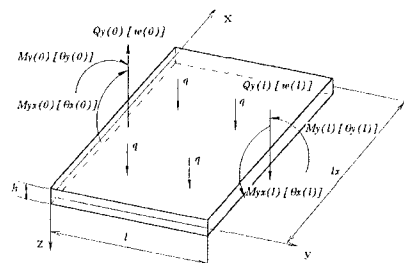


図-1 ライスナー・ミンドリン帯板要素の力と変位

また、両端単純支持を仮定すると、変位、応力はそれぞれ x 方向に次のように級数展開することができる。

$$\begin{aligned} w &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin \frac{n\pi}{l} x & \theta_y &= \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{yn} \sin \frac{n\pi}{l} x & \theta_z &= \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{zn} \cos \frac{n\pi}{l} x \\ Q_y &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_{yn} \sin \frac{n\pi}{l} x & M_x &= \sum_{n=1}^{\infty} M_{xn} \sin \frac{n\pi}{l} x & M_y &= \sum_{n=1}^{\infty} M_{yn} \cos \frac{n\pi}{l} x \end{aligned} \quad (2)$$

式(1)の三式をに力と変位の関係式²⁾を用いて部分積分を行ない、式(2)を代入して整理する。その後三式を足し合わせると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & [Q_{yn} w_n^* - Q_{zn}^* w_n - M_{xn} \theta_{yn}^* + M_{yn}^* \theta_{zn} - M_{zn} \theta_{yn}^* + M_{xn}^* \theta_{zn}]_0^l \\ & + \int_0^l \left\{ khG \left(\frac{\partial^2 w_n^*}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta_{zn}^*}{\partial y} \right) - khG \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 w_n^* + khG \left(\frac{n\pi}{l} \right) \theta_{zn}^* \right\} w_n dy \\ & + \int_0^l \left\{ khG \left(\frac{\partial w_n^*}{\partial y} - \theta_{zn}^* \right) + D \frac{\partial^2 \theta_{zn}^*}{\partial y^2} - \frac{1-\nu}{2} D \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \theta_{zn}^* - \frac{1+\nu}{2} D \left(\frac{n\pi}{l} \right) \frac{\partial \theta_{zn}^*}{\partial y} \right\} \theta_{zn} dy \\ & + \int_0^l \left\{ \frac{1+\nu}{2} D \left(\frac{n\pi}{l} \right) \frac{\partial \theta_{zn}^*}{\partial y} - khG \theta_{zn}^* + khG \left(\frac{n\pi}{l} \right) w_n^* + \frac{1-\nu}{2} D \frac{\partial^2 w_n^*}{\partial y^2} - D \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \theta_{zn}^* \right\} \theta_{zn} dy \\ & + \int_0^l q_{yn} w_n^*(y, \xi) dy + \int_0^l q_{zn} \theta_{zn}^*(y, \xi) dy + \int_0^l q_{zn} \theta_{zn}^*(y, \xi) dy = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、変位基本解 $w_n^*(y, \xi)$, $\theta_{zn}^*(y, \xi)$, $\theta_{zn}^*(y, \xi)$ は次式を満足するものとする。 ξ は単位荷重の作用点を表す。

$$\begin{aligned} & -khG \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 w_n^* + khG \left(\frac{n\pi}{l} \right) \theta_{zn}^* + khG \frac{\partial^2 w_n^*}{\partial y^2} - khG \frac{\partial \theta_{zn}^*}{\partial y} = -Z \delta(y, \xi) \\ & khG \left(\frac{\partial w_n^*}{\partial y} - \theta_{zn}^* \right) + D \frac{\partial^2 \theta_{zn}^*}{\partial y^2} - \frac{1-\nu}{2} D \left(\frac{n\pi}{l} \right) \frac{\partial \theta_{zn}^*}{\partial y} - \frac{1+\nu}{2} D \left(\frac{n\pi}{l} \right) \frac{\partial w_n^*}{\partial y} \\ & - \frac{1-\nu}{2} D \left(\frac{n\pi}{l} \right) \frac{\partial \theta_{zn}^*}{\partial y} - \frac{1-\nu}{2} D \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \theta_{zn}^* = -X \delta(y, \xi) \\ & khG \left(\frac{n\pi}{l} \right) w_n^* - khG \theta_{zn}^* - D \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \theta_{zn}^* + \nu D \left(\frac{n\pi}{l} \right) \frac{\partial \theta_{zn}^*}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} D \frac{\partial^2 \theta_{zn}^*}{\partial y^2} \\ & + \frac{1-\nu}{2} D \left(\frac{n\pi}{l} \right) \frac{\partial w_n^*}{\partial y} = -Y \delta(y, \xi) \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、 X, Y, Z はそれぞれの軸の単位荷重であり、 $\delta(y, \xi)$ はデルタ関数を表す。

ここで、 $Z=1, Y=X=0$ の場合の基本解を $w_n^{(1)}, \theta_n^{(1)}, \theta_m^{(1)}$ 、 $X=1, Y=Z=0$ の場合の基本解を $w_n^{(2)}, \theta_n^{(2)}, \theta_m^{(2)}$ 、 $Y=1, X=Z=0$ の場合の基本解を $w_n^{(3)}, \theta_n^{(3)}, \theta_m^{(3)}$ で表すと式(3)は次式ようになる。

$$w_{in}(\xi) = [Q_n(y) w_n^{(i)}(y, \xi) - Q_m^{(i)}(y, \xi) w_m(y) - M_{yn}(y) \theta_m^{(i)}(y, \xi) + M_{yn}^{(i)}(y, \xi) \theta_m(y) - M_{yn}(y) \theta_m^{(i)}(y, \xi) + M_{yn}^{(i)}(y, \xi) \theta_m(y)] J_0' + \int_0^1 q_m w_n^{(i)}(y, \xi) dy \quad (i=1, 2, 3) \quad (5)$$

ただし、 $w_m(\xi) = w_n(\xi)$, $w_{2n}(\xi) = \theta_m(\xi)$, $w_{3n}(\xi) = \theta_m(\xi)$, $q_m = q_n = 0$

式(5)において、 $\xi \rightarrow +\varepsilon$ 及び $\xi \rightarrow -\varepsilon$ としたときの $\varepsilon \rightarrow 0$ (微小な正数) の極限を考えることにより以下の6本のマトリックス方程式が得られる。ただし、荷重項 $[H_{bn}]$ については省略する。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ w_n^{(1)}(0, l) & -\theta_n^{(1)}(0, l) & -\theta_m^{(1)}(0, l) & -Q_n^{(1)}(0, l) & M_{yn}^{(1)}(0, l) & M_{yn}^{(1)}(0, l) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ w_n^{(2)}(0, l) & -\theta_n^{(2)}(0, l) & -\theta_m^{(2)}(0, l) & -Q_n^{(2)}(0, l) & M_{yn}^{(2)}(0, l) & M_{yn}^{(2)}(0, l) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ w_n^{(3)}(0, l) & -\theta_n^{(3)}(0, l) & -\theta_m^{(3)}(0, l) & -Q_n^{(3)}(0, l) & M_{yn}^{(3)}(0, l) & M_{yn}^{(3)}(0, l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_n(l) \\ M_{yn}(l) \\ M_{yn}(l) \\ w_n(l) \\ \theta_n(l) \\ \theta_m(l) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -w_n^{(1)}(l, 0) & \theta_n^{(1)}(l, 0) & \theta_m^{(1)}(l, 0) & Q_n^{(1)}(l, 0) & -M_{yn}^{(1)}(l, 0) & -M_{yn}^{(1)}(l, 0) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -w_n^{(2)}(l, 0) & \theta_n^{(2)}(l, 0) & \theta_m^{(2)}(l, 0) & Q_n^{(2)}(l, 0) & -M_{yn}^{(2)}(l, 0) & -M_{yn}^{(2)}(l, 0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -w_n^{(3)}(l, 0) & \theta_n^{(3)}(l, 0) & \theta_m^{(3)}(l, 0) & Q_n^{(3)}(l, 0) & -M_{yn}^{(3)}(l, 0) & -M_{yn}^{(3)}(l, 0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_n(l) \\ M_{yn}(l) \\ M_{yn}(l) \\ w_n(l) \\ \theta_n(l) \\ \theta_m(l) \end{bmatrix} = [H_n] (6) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

式(6)における12個の境界未知量のうち6個については両端の境界条件より定まり、残りの6個の未知量は6行6列のマトリックス方程式を各項数ごとに解くことにより求めることができる。

3. 数値計算例

先に述べた解析理論に基づいて計算プログラムを作成し、板厚を変えて数値解析を行ったが、紙面の都合上一例のみを示す。

表-1は等分布荷重 q をうける4辺単純支持等方性矩形板の中央点の垂直たわみの結果を表しており、また表中には有限帯板法(FSM)及び厳密解(級数解法)による解析結果も示した。

表-1 等分布荷重 q を受ける4辺単純支持等方性

矩形板の中央点のたわみ

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, l = l_y = 100 \text{ cm}, \nu = 0.3$$

$$K = 0.8333333, h = 10.0 \text{ cm}, q = 1.0 \text{ kg/cm}$$

l/lx	中 央 点 (cm)		
l.0	B S M	F S M	厳密解
W	0.222193D-02	0.2217D-02	0.222188D-02
Mx	0.479050D+03	4.8056D+02	0.478864D+03
My	0.478463D+03	4.8785D+02	0.478864D+03

4. あとがき

本研究では、境界帯板法による中厚板の応力解析を行なった。その解析結果を有限帯板法、級数解法の解析結果と比較したところほぼ等しい値が得られた。

有限要素法や有限帯板法は要素数を多く必要とするので、任意点の変化量を求めるが難しく計算時間も長くなるが、本手法は境界条件、荷重条件に関わりなく、6行6列のマトリックスを解くだけでよいため計算時間も短く、また容易に任意点の値を求めることができる。

今後の課題は、これまで応力解析を行った中厚板一枚を帯板要素とすることより、面内面外両作用が共存するような立体的な折板構造物の3次元応力解析に本手法を拡張したいと考えている。

【参考文献】

- 1) 構造工学公式集, 土木学会, 昭和61年版
- 2) 材料力学と変分法, ブレイン図書出版株式会社, 1977年第一版