I －18

h-アダプティブハイブリッド/混合有限要素法の応用に関する研究

岩手大学工学部　学生員　○段　梅
岩手大学工学部　正　員　宮本　裕　岩崎　正二　出戸　秀明

1.まえがき

アダプティブ有限要素法(Adaptive Finite Element Method)はコンピューターで解析モデルのメッシュを自動的に生成して数値計算を行い、解の事後誤差評価を利用してなるべく誤差が少なくなるように再びメッシュを切直し、良い結果が得られるまで繰り返し計算を行う方法である。一般に有限要素法のプログラムを使用する際には入力データの作成と計算結果の整理に多大な時間と労力を費やす。アダプティブ有限要素法では、メインプロセッサ(計算部分)の図形処理部分にポストプロセッサを組み込むことにより時間と労力の省力化をはかっている。従って世界中でアダプティブ有限要素法は大型汎用プログラムに組み込まれ、工学の分野ばかりでなく様々な分野の実用的問題の解決の有効な手段となっているため、有限要素法の研究の中で重要な位置を占めつつある。

さて、現在有限要素法プログラムにおいて最も広く採用されている方法は変位法に基づく手法である。その背景には変位法の持つ汎用性という利点があることは周知の通りである。しかし、変位型有限要素法で解決できない問題も数多く存在している。解の精度を上げるために、いろいろな方法が提案されているが、変位と応力を混合した形のハイブリッド/混合法は、要素の自由度の大きさに比べて解析精度が高いために高く評価されている。本論文で開発したアダプティブハイブリッド/混合法はアダプティブ法とハイブリット/混合法の両手法の長所を組み合わせた方法であり、少ない要素で高精度の解を得ることができる。従って変位型有限要素法では大型計算機を使ってしか解けないような要素数が多い問題も、本手法を用いるとパーソナルコンピューターで解析することができる。また、アダプティブ有限要素法の中にも、ｈ－型、ｐ－型、ｒ－型、ｈｐ－型などがあるが、本論文では、誤差の大きな要素を細分割するｈ-型についてのみ論じる。数値計算例では、変位型有限要素法(FEM)とハイブリット/混合法(H/M)とアダプティブ有限要素法(AFEM)及び本手法(AH/M)の解析結果を比較検討することにより本手法の有効性を示した。

2.解析理論

Hellinger-Reissner原理の汎関数:

$$\pi_{RS}(\sigma,u_q,u_\lambda)=\sum_n\left\{\int_{vn}\left[-\frac{1}{2}\sigma^T s\sigma+\sigma^T(Du_q)-(D^T\sigma+\bar{F})^T u_\lambda\right]dV-\int_{vn}\bar{F}^T u_q dv-\int_{s\sigma n}\bar{T}\bar{u}_q ds\right\}$$

(1)

近似解を得るため、各要素内で応力と要素の境界で変位を次のように仮定する。

$$\sigma=P\beta \qquad u_\lambda=M\lambda \qquad u_q=Nq$$

ここで,β は応力パラメータであり、λ, q は変位パラメータである。P, M, N は係数マトリックスである。式(1)に上式を代入すれば、次のような汎関数が得られる。

$$\pi_{RS}=\sum_n -\frac{1}{2}\beta^T H\beta+\beta^T Gq-\beta^T R\lambda-Q^T q$$

(2)

ここで、$H=\int_{V_n}P^T SPdV$,　$G=\int_{V_n}P^T(DN)dV$,　$R=\int_{V_n}(D^T P)^T MdV$, Q は物体力と等価な節点力を表す。要素において(2)の変分式から、次の解が得られる。

$$\lambda=(R^T H^{-1}R)^{-1}R^T H^{-1}Gq, \qquad \beta=H^{-1}(Gq-R(R^T H^{-1}R)^{-1}R^T H^{-1}Gq),$$

$$G^T H^{-1}(G-R(R^T H^{-1}R)^{-1}R^T H^{-1}G)q=Q$$

3.ｈ－アダプティブハイブリッド/混合有限要素法の解析方法

本論文は、Hellinger-Reissner原理としての４節点要素を用いたハイブリッド/混合有限要素法で事後誤差評価を利用して問題の解を有効に求めている。

(1)アイソパラメトリック四辺形要素

$u=\sum_{i=1}^{4}N_i u_i$,ここで $N_i=\frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)$ (i=1,･･･,4)u_iは節点変位であり、$(\xi,\ \eta)$ は局所座標系である。

(2)事後誤差評価

$$\|e\|^2=\sum_{i=1}^{N}\frac{(1-v)h_i^{\,2}}{24E}\int_{\Omega_i}(r_2+Lr_1)d\Omega+\frac{(1-v)h_i}{24E}\Big(\sum_{\Gamma_i\not\subset\Gamma}\int_{\Gamma_i}J^2 ds+\sum_{\Gamma_i\subset\Gamma}\int_{\Gamma_i}(\sigma_k-T)^2 ds\Big) \qquad (3)$$

ここで、N,E,V,tはそれぞれ要素数、Young比、Poisson比、厚さである。$r_2=D^T u_k$, $r_1=Du_k-s\sigma_k$ Jは要素の境界で応力の'Jump'。

$$s=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{E} & -\dfrac{v}{E} & 0 \\ -\dfrac{v}{E} & \dfrac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2(1+v)}{E} \end{bmatrix} \quad L=\begin{bmatrix} \dfrac{E}{1-v^2}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{-vE}{1-v^2}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{E}{2(1-v)}\dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{-vE}{1-v^2}\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{E}{1-v^2}\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{E}{2(1-v)}\dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad D^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

4. 解析結果及び考察

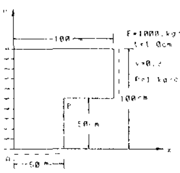



図-1L-型板 図-2 メッシュの初期分割

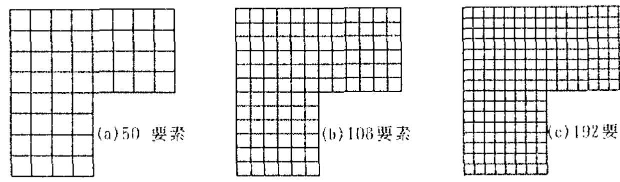
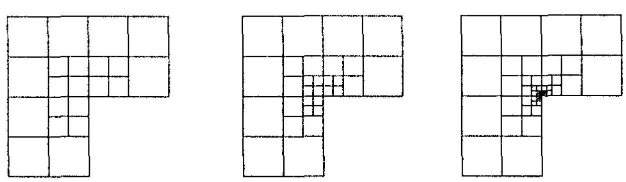
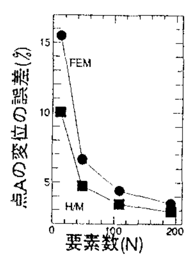


図-3 メッシュの平均分割

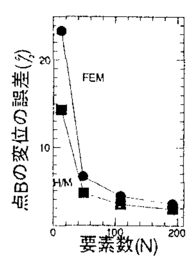


(a) 21 分割 (b)30 分割 (c) 48 分割

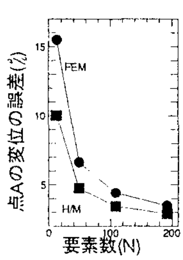
図-4 アダプティブ法で作成したメッシュ分割



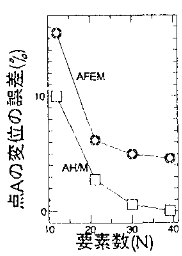
図(5-1)



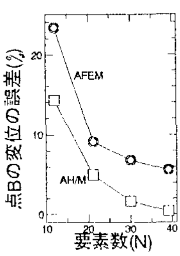
図(5-2)



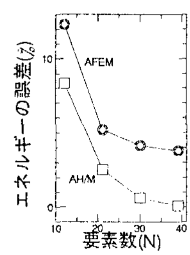
図(5-3)



図(5-4)



図(5-5)



図(5-6)

図-5 四種類の解析方法による変位誤差とエネルギー誤差(図(1)-図(6))

以上は理論であるが、つぎに図-1に示すL-型板の応力集中問題に本手法を適用し,本手法の利点を示す。変位型有限要素法、ハイブリッド/混合有限要素法、アダプティブ有限要素法と本研究のｈ－アダプティブハイブリッド/混合有限要素法でそれぞれに計算して,それらの結果を比較検討した。図-3がメッシュの平均分割を示し、図-4 はアダプティブ法で作成したメッシュの分割を示す。これらの作業は、すべてパーソナルコンピューターが自動的に行う。図-5は四種類の方法で計算した結果示す。図(1)-(3)は図-3のメッシュ分割であり、図(4)-(6)は図-4のメッシュ分割である。計算結果を比較した結果,精度の良い方法の順番は次のように示される。

(1)変位型有限要素法 → (2)h-アダプティブ有限要素法 (時間、労力の省力化) → (4)h-アダプティブハイブリッド/混合有限要素法

(1)変位型有限要素法 → (3)ハイブリッド/混合有限要素法 (高精度化) → (4)h-アダプティブハイブリッド/混合有限要素法

従って、本論文の方法が時間と労力、効率、精度等において有効な計算方法であることが明らかとなった。プレプロセッサとポストプロセッサを用いるので、h-アダプティブハイブリッド/混合有限要素法は工学分野の数値解析手法の中でも強力な手法となりうるであろう。

5. まとめ

本研究においてh-アダプティブハイブリッド/混合有限要素法を提案した。このような方法は、時間と労力の省力化、計算の自動化、解の高精度化の利点がある。工学の問題に応用する場合、橋梁、ダム、岩盤の亀裂など問題に対して効率よく計算することができると思われる。