

Ⅲ-39

散逸関数を用いた粒状体構成則の繰返し載荷試験への応用

東北大学 学生員 ○金子賢治

東北大学 正 員 岸野佑次

1. はじめに

粒状体の力学については様々なアプローチによって研究がなされているが、構成則に関して未だ確固とした理論はないように思われる。本論文は、著者の一人が提案した粒状体の構成則理論¹⁾を繰返し載荷問題に拡張し要素試験のシミュレーションにより繰返しせん断を受けたときの粒状体の挙動を表現しようとするものである。

2. 粒状体の構成則の定式化

(1) 散逸関数に基づく構成則理論

塑性論と同様に、ひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ を弾性ひずみ速度 $\dot{e}$ と散逸ひずみ速度 $\dot{d}$ とに分けられるとし、散逸ひずみ速度 $\dot{d}$ は主散逸ひずみ速度 $\dot{d}'$ 、従散逸ひずみ速度 $\dot{d}''$ とに分けられるとして、次のようにおく。

$$\dot{\epsilon} = \dot{e} + \dot{d} \quad (1) \quad \dot{d} = \dot{d}' + \dot{d}'' \quad (2)$$

図-1に示すように、主散逸ひずみ速度は散逸変形に主体的に関与し従散逸ひずみ速度はこれに従属して生じる。また、主散逸ひずみ速度テンソルと従散逸ひずみテンソルは次式のように直交するとする。

$$\dot{d}' : \dot{d}'' = 0 \quad (3)$$

ここで、主散逸ひずみ速度と従散逸ひずみ速度との間に C を拘束関数と称して次の拘束条件を仮定する。

$$\dot{d}' = n \dot{\alpha} \quad \dot{d}'' = C l \dot{\alpha} \quad C = C(\alpha, n, \alpha) \quad (4)$$

$$n : n = 1, \quad l : l = 1, \quad l : n = 0 \quad (5)$$

n 、および、 l は各ひずみ速度の方向を表す単位テンソルである。また、

$$\alpha = \int \dot{\alpha} dt \quad \dot{\alpha} = \dot{d} : n \quad (6)$$

は、主散逸ひずみ速度の絶対値の積分であり、散逸変形の進行を表す変形パラメータとして用いる。なお、散逸変形パラメータは散逸変形モード対応して定義される量であり、一般に複数存在すると考えられるがここでは1個として説明する。

全散逸ひずみ速度は次式のように表すことができる。

$$\dot{d} = (n + Cl) \dot{\alpha} \quad (7)$$

求まった散逸ひずみ速度に対する散逸仕事速度は式のようになる。

$$\sigma : \dot{d} = \omega \dot{\alpha} \quad (8)$$

$$\omega = \sigma : (n + Cl) \quad (9)$$

ここに ω は単位の主散逸ひずみあたりの散逸仕事を表す。

散逸関数は、散逸ひずみが生じるとき、このひずみを生じさせるのに必要な単位体積・単位主散逸ひずみあたりのエネルギーを表し次のようになる。

$$\varphi = \varphi(\sigma, n, \alpha) \geq 0 \quad (10)$$

散逸の起こる条件として、図-2における散逸曲面と散逸仕事面が共通点を持つ必要がある。ここで、 φ を表す曲面を散逸曲面、 ω を表す曲面を散逸仕事面と表示した。

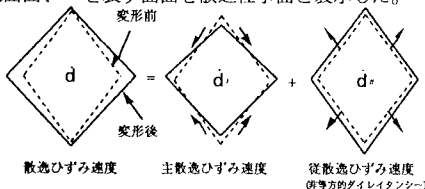


図-1 散逸ひずみ速度の分解

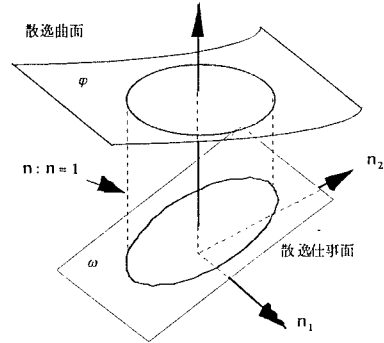


図-2 散逸関数と散逸仕事

この条件は次の散逸エネルギーに関する平衡条件を意味する。

$$f = \varphi - \omega = 0 \quad (n : n = 1) \quad (11)$$

このことから、 $n : n = 1$ 、 $l : n = 0$ の付帯条件の下に f を最小にする条件、および、 C と φ が n に依存しないという仮定の下に次の流動則を得る。

$$n = \frac{\sigma - \sigma'}{\sigma : n} \quad \sigma' = (\sigma : n) n, \quad \sigma'' = (\sigma : l) l \quad (12)$$

散逸が継続して生じるためには散逸条件を満たし続ける必要がある。塑性論の適応の条件と同様に、式(9)に基づいて次の硬化・軟化則を得る。

$$\dot{\alpha} = \frac{m : \sigma}{D} \quad (13)$$

$$m = -\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\sigma}{\sigma : n} + (C - \frac{\sigma : l}{\sigma : n}) \frac{\partial \sigma : l}{\partial \sigma} + \sigma : l \frac{\partial C}{\partial \sigma} - \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}$$

$$D = \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \sigma : (\frac{\partial n}{\partial \alpha} + l \frac{\partial C}{\partial \alpha} + C \frac{\partial l}{\partial \alpha})$$

以上より、散逸ひずみ速度は、

$$\dot{d} = \frac{(n + Cl) m : \sigma}{D} \quad (14)$$

と与えられ、一般に非関連流動則型の構成式となる。

(2) 粒状体の構成則の定式化

ここでは、粒状体のダイレイタンス現象がせん断応力の発達とともに異方的に生じるとし、構成則の定式化を行う。弾性ひずみ速度 $\dot{e}$ は、次の等方弾性体の構成式を仮定する。

$$\dot{e} = \{(1 + \nu) \dot{\sigma} - \nu (\dot{\sigma} : I) I\} / E \quad (15)$$

ここに、 E はヤング率、 ν はポアソン比である。

従散逸ひずみ速度 $\dot{d}''$ の方向を表す単位テンソル l の主値を応力の関数として次式のように仮定する。¹⁾

$$l_k = \frac{1}{\sigma_k} \sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2}} \quad (k=1, 2, 3) \quad (16)$$

本モデルにおける拘束関数 C は変形パラメータ α のみの関数とし、単位主散逸ひずみあたりの散逸仕事を次式のようにおく。

$$\omega = \sigma : n + C(\alpha) \sigma : l \quad (17)$$

散逸関数については、次のような仮定に基づいて式(18)のように定める。

①粒状体内部の滑り摩擦は主散逸ひずみ速度として現れ、これを拘束する従散逸ひずみ方向の応力 $\sigma : l$ に比例して散逸

エネルギーが生じる。

② $\sigma:l$ のする仕事の一部は粒状体内部の構造変化のため消費され、この散逸はダイレタンシーを抑える方向に生じ、 $C(\alpha) \sigma:l$ に比例する。

$$\varphi = (M - K C(\alpha)) \sigma:l \quad (18)$$

C と φ は応力 σ と変形パラメーター α のみの関数であるので、流動則は式 (12) より定まり、主散逸ひずみ速度 $\dot{d}'$ の方向を表す単位のテンソル n の主値は次式ようになる。

$$n_k = \frac{\sigma_k - \frac{3}{\sigma_k} \left/ \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2} \right) \right.}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 9 \left/ \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2} \right) \right.}} \quad (19)$$

拘束関数 C も変形パラメーター α のみの関数とし、次式を仮定する。¹⁾

$$C(\alpha) = \frac{M}{1+K} \frac{1-b\alpha}{1+a\alpha} \quad (20)$$

以上より、散逸ひずみ速度を求めるための m 、 D が式 (13) の m 、 D の定義より次のように算定される。

$$m = \frac{\sigma}{\sigma:n} - \left\{ M - (1+K)C + \frac{\sigma:l}{\sigma:n} \right\} \frac{\partial \sigma:l}{\partial \sigma} \quad (21)$$

$$D = -(1+K) \sigma:l \frac{\partial C}{\partial \alpha} \quad (22)$$

ここに、

$$\frac{\partial \sigma:l}{\partial \sigma} = 3l^3 \quad (23)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \alpha} = -\frac{M}{1+K} \frac{a+b}{(1+a\alpha)^2} \quad (24)$$

である。

以上より、このモデルにおいては、6つの材料定数 E 、 ν 、 M 、 K 、 a 、 b を定めることにより構成則が確定する。

3. 繰返し载荷試験への応用

本論文では、前章で定めた誘導異方性を考慮した粒状体の構成則を用いて繰返し载荷要素試験シミュレーションへの応用例を示す。繰返し荷重を受ける粒状体は、载荷、除荷によって異なった滑り面が生じると考えられる。このため、本シミュレーションでは散逸変形の進行を表す変形パラメーター α については载荷時は α_1 、除荷時は α_2 として解析を行うこととした。なお、制御方法は体積一定の応力制御とする。また、シミュレーションに用いた定数を表-1に示す。

表-1 構成則に用いた諸定数

$E: 2,000 \text{ kgf/cm}^2$
$\nu: 0.3$
$M: 0.5 \quad K: 0.3 \quad a: 240 \quad b: 650$
$p: 4 \text{ kgf/cm}^2$

図-3、図-4にせん断ひずみ、せん断応力関係を示すが、図-3は応力振幅 0.375 kgf/cm^2 、図-4は応力振幅 0.390 kgf/cm^2 であり、それぞれ4サイクルの解析結果である。図-3では、2サイクル目からループが小さくなり続けるが、図-4では2サイクル目から同様に小さくなり始めるが、4サイクル目で再びループが大きくなり始める。これは、図-4の方が応力振幅が大きいためより早く粒子が不安定になりつあると考えられる。図-5に図-4（応力振幅 0.390 kgf/cm^2 ）の場合の平均有効応力とせん断応力の関係を示す。ここでも2、

3サイクル目では平均応力の減少率が小さくなり、4サイクル目で大きくなる。このことから4サイクル目から徐々に粒子が不安定になりつあることがうかがえる。粒子が不安定になる直前までの解析結果はこのように表せるが、この後の解析については現在継続中であり当日発表したい。

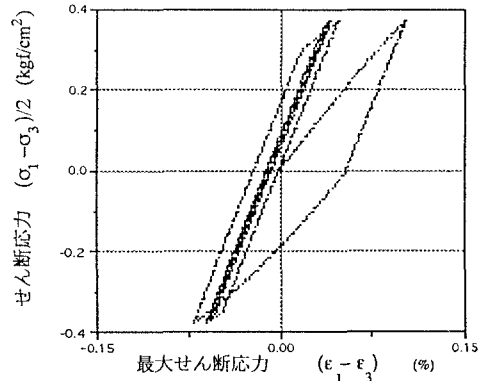


図-3 最大せん断ひずみ-せん断応力関係

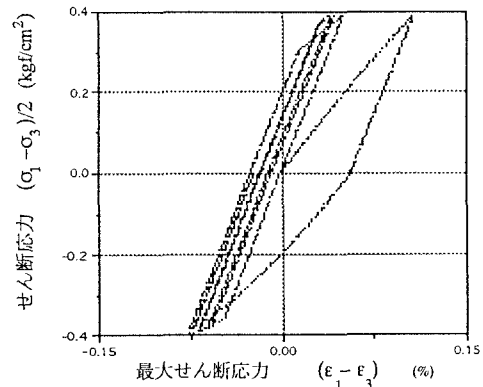


図-4 最大せん断ひずみ-せん断応力関係

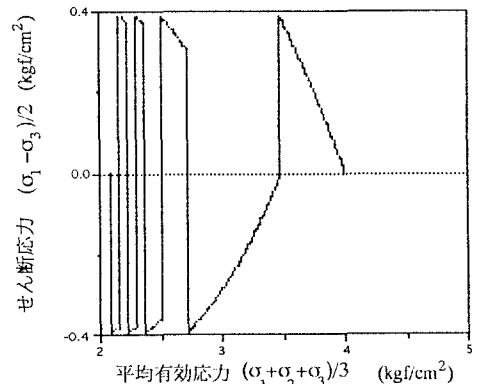


図-5 平均有効応力-せん断応力関係

4. おわりに

本繰返しモデルにおいては2つの α をまったく独立とした構成則を用いたがこの2つの α を互いに関連づけることなどが考えられる。今後さらに検討を加えたい。

参考文献 1) 岸野佑次：摩擦性材料の構成則の定式化、土木学会論文集、No511/III-30, 1995.3