Ⅲ－34

粒状体の３Ｄ離散力学と間隙セルの考察

東北学院大学大学院　学生員　○相澤　亮
東北学院大学工学部　正会員　佐武　正雄

１．まえがき

粒状体の離散解析を３Ｄに拡張すると、粒子グラフにおいてループの他に間隙セルが付加される。間隙セルを間隙の一つの単位と考え、３Ｄ離散力学を構成し、また間隙セルの規則性などについて考察した。

２．粒状体の離散力学（2D）

粒状体の力学において、通常は粒子と接触点においてのみ力学量を考えるが、粒状体の双対性を考慮し間隙にも新たに力学量を導入する。最も一般的な場合を考え、また記述を簡単にするため、表－１のようにベクトル表現を導入する。添字、P,C,V は、それぞれ粒子、接触、間隙に対する番号である。接触力F_Cは接触点Cの両側の粒子に働く接触力（またはモーメント）、接触変位U_CはCの両側の粒子の相対変位（または回転）で、これらの接触点の力学量は、何れも正に接続されている粒子に対して定義される。ここに正（または負）に接続されているとは、その粒子が接触点に対応する枝ベクトルの始点（または終点）になっていることを意味する。

これらの力学量の間には次式の関係が成り立つ。

$$\mathbf{F_P} = -\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{PC}}\mathbf{F_C}\ ,\qquad \mathbf{U_C} = -\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{CP}}\mathbf{U_P} \qquad (1)$$
$$\mathbf{F_C} = -\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{CV}}\mathbf{F_V}\ ,\qquad \mathbf{U_V} = -\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{VC}}\mathbf{U_C} \qquad (2)$$

ここに、$\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{PC}}, \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{CV}}$ はそれぞれ粒子グラフの基本マトリックス（拡張接続マトリックス及び拡張ループマトリックス）で繰り返される番号については和をとるものとする。基本マトリックスは、恒等式

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{PC}}\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{CV}} = \mathbf{0}\ ,\qquad \tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{VC}}\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{CP}} = \mathbf{0} \qquad (3)$$

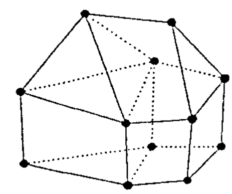
を満足している。式（１）～（３）より表－２が導かれる。

３．3Dへの拡張

３Ｄの場合、粒状体の間隙は全部連結しているが、ループによって囲まれるセルを考え（図－１）、このセルを間隙の単位（間隙セル）と考える。３Ｄの場合のグラフ表現（粒子グラフ、及び双対な間隙グラフ）を考えると表－３のようになり、要素が４個となっている。したがって、３Ｄ離散力学における基本マトリックスには、ループと間隙セルの接続関係を示すセルマトリックスが付加され、拡張ループマトリックスと拡張セルマトリックスの間にも

$$\tilde{\mathbf{L}}_{\mathbf{CD}}\tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{DV}} = \mathbf{0} \qquad (4)$$

の関係（恒等式）が成立する。



図－１　３Ｄ粒子グラフ

表－１　２Ｄ離散力学の力学量

	粒　子	接　触	間　隙
力 モーメント $\begin{pmatrix} f \\ m \end{pmatrix} = F$	F_P	F_C	F_V
変　位 回　転 $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = U$	U_P	U_C	U_V

表－２　２Ｄ力学量の関係式

F_P	F_C	F_V
$F_P = -\tilde{D}_{PC}F_C$		
$F_P = 0\ \ (\tilde{D}_{PC}F_C = 0)\ \Leftrightarrow\ F_C = -\tilde{L}_{CV}F_V$		
U_V	U_C	U_P
$U_V = -\tilde{L}_{VC}U_C$		
$U_V = 0\ \ (\tilde{L}_{VC}U_C = 0)\ \Leftrightarrow\ U_C = -\tilde{D}_{CP}U_P$		

表－３　３次元の粒子グラフと間隙グラフの対応

粒 状 体	粒　子（P）	粒子接触（C）	間隙接触（D）	間　隙（V）
粒子グラフ	点	枝	ループ	セ　ル
間隙グラフ	セ　ル	ループ	枝	点

表－４　３Ｄ離散力学の力学量

	粒　子	粒子接触	間隙接触	間　隙
力 モーメント $\begin{pmatrix} f \\ m \end{pmatrix} = F$	F_P	F_C	F_D	F_V
変　位 回　転 $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = U$	U_P	U_C	U_D	U_V

2Dの場合と同様に、3Dの力学量を表－4に示す。添字Dは間隙接触に対する番号である。
表－4の力学量の間に次式の関係が成り立つ。

$$\mathbf{F_P}= -\tilde{\mathbf{D}}_{PC}\mathbf{F_C}\ , \qquad \mathbf{U_C}= -\tilde{\mathbf{D}}_{CP}\mathbf{U_P} \tag{5}$$
$$\mathbf{F_C}= -\tilde{\mathbf{L}}_{CD}\mathbf{F_D}\ , \qquad \mathbf{U_D}= -\tilde{\mathbf{L}}_{DC}\mathbf{U_C} \tag{6}$$
$$\mathbf{F_D}= -\tilde{\mathbf{C}}_{DV}\mathbf{F_V}\ , \qquad \mathbf{U_V}= -\tilde{\mathbf{C}}_{VD}\mathbf{U_D} \tag{7}$$

また基本マトリックスの間には、式（3）の他に恒等式

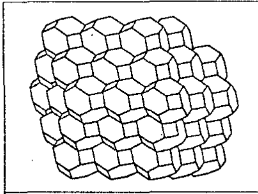
$$\tilde{\mathbf{L}}_{CD}\tilde{\mathbf{C}}_{DV}=\mathbf{0}\ , \qquad \tilde{\mathbf{C}}_{VD}\tilde{\mathbf{L}}_{DC}=\mathbf{0} \tag{8}$$

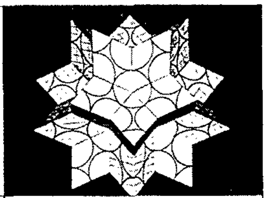
が成り立つ。

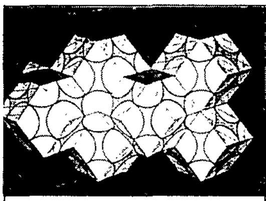
これらの式により表－5が導かれる。3Dにおいては（粒子）接触の力学量に対して間隙接触（ループ）の力学量が直接関係し、間隙の力学量は間接的に関係していることが分かる。

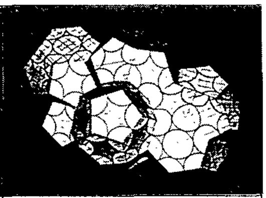
表－5　　3D力学量の関係式

F_P	F_C	F_D	F_V
$F_P=-\tilde{D}_{PC}F_C$			
$F_P=0\ (\tilde{D}_{PC}F_C=0) \Leftrightarrow F_C=-\tilde{L}_{CD}F_D$			
	$F_C=0\ (\tilde{L}_{CD}F_D=0) \Leftrightarrow F_D=-\tilde{C}_{DV}F_V$		
U_V	U_D	U_C	U_P
$U_V=-\tilde{C}_{VD}U_D$			
$U_V=0\ (\tilde{C}_{VD}U_D=0) \Leftrightarrow U_D=-\tilde{L}_{DC}U_C$			
	$U_D=0\ (\tilde{L}_{DC}U_C=0) \Leftrightarrow U_C=-\tilde{D}_{CP}U_P$		


（a）　体心立方格子


（b）　アキュート


（c）　菱形十二面体


（d）ウィエール・ペラン構造

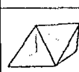
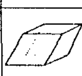
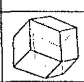
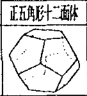
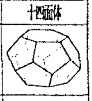
図－2　　空間充填形図

4．3Dの規則的空間充填と間隙セルに関する考察

規則的な空間充填における間隙セルについて考察する。粒子（等球）の空間充填を考え、その規則性や間隙率などの解析を行なってみた。
<1>1種類の準正多面体（間隙セル）だけで空間充填をするものは、体心立方格子（図－2(a)）のみで、これは2つの間隙セル（三角錐と四角錐）の組み合わせでできる空間充填形である。またその双対な多面体として菱形十二面体（図－2(c)）を考えると、4つの菱形十二面体で一つの空間充填をつくり、横方向につながっていくことが分かる。
<2>黄金菱形のみを側面とする2種類（アキュート、オブチュース）では、オブチュースの粒子の空間充填は成り立たず、アキュートの組み合わせにより放射状の星型の空間充填形（図－2(b)）ができる
<3>ウィエール・ペラン構造（2種類の間隙セルからなる空間充填構造）（図－2(d)）について解析した。

結果を一括して表－6に示す。これらの空間充填構造は、すき間のない連続構造として無限につながっていくと考えられる。

表－6　　空間充填する立体の間隙率

	(a) 体心立方格子	(b) アキュート	(c) 菱形十二面体	(d) ウィエール・ペラン構造	
				正五角形十二面体	十四面体
立体形状					
点 枝 ループ	6 9 5	8 12 6	14 24 12	20 30 12	24 36 14
体　積 間隙率 (等球)	0.353553 0.253875	0.800071 0.345552	3.060324 0.486754	7.663119 0.677923 0.709509	10.74751 0.732031

5．あとがき

本文は、粒状体の2D離散解析を3Dに拡張し、3Dにおける離散力学諸量の関係式を示した。また規則的空間充填における間隙セルに関して考察した。ここに得られた結果は粒状体の3Dシミュレーションなどに応用することができると考えられ、さらに研究を進めたい。

[参考文献]

1. M.Satake, A discrete-mechanical approach to granular materials, Int.J.Engng.Sci Vol.30 No.10 pp1525-1533,1992
2. M.Satake, Discrete-mechanical approach to granular media, Powder & Grains 93(edit.C.Thornton) A.A.Balkema, pp3-9, 1993