

ループ及び接続テンソルによる粒状体パッキングの解析

東北学院大学大学院 学生員 ○安保祥成
東北学院大学工学部 正員 佐武正雄

1. まえがき

粒状体において、間隙率とともにその分布が重要であることが指摘されている¹⁾。そこで、筆者らは、2次元のパッキングのグラフ表現において間隙とループが対応することから、一つの間隙に対してループテンソルを定義し、全体のパッキングについて平均ループテンソルとループ分散テンソルを導入して、間隙分布の状態を表現する方法を提案し解析を行ってきた²⁾。

本文では、粒子集合体の状態を表現するもう一つの方法として、個々の粒子の接続に着目して定義した接続テンソルを導入し、円パッキングについて、ループテンソルの場合と同様に平均・分散を求め、さらに個々の粒子の接続に着目した修正ボロノイ分割法も加え、変動係数などについて比較・検討してみた。

2. 接続テンソルの定義

ループテンソルは、図-1に示すように一つのループを構成する枝ベクトルについて総和をとるものであるが、接続テンソルは、図-2に示すように、一つの粒子に接続する枝ベクトルについての総和であり、式(1)のように定義する。

$$\pi_p = \frac{1}{2} \sum_{i \in p} \ell_i \otimes \ell_i \quad (1)$$

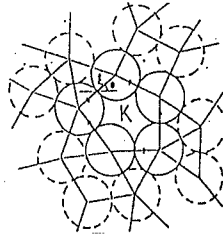


図-1 ループ

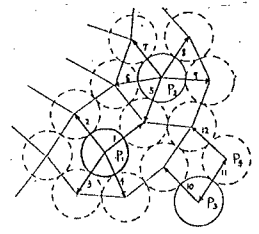


図-2 粒子の接続

ループテンソルの場合と同様に、パッキング全体についての平均接続テンソル π と接続分散テンソル η は、次式によって定義する。

$$\pi = 1/N \sum_p \pi_p \quad (2)$$

$$\eta = 1/N \sum_p (\pi_p - \pi)^2 \quad (3)$$

ここに、Nはパッキングに含まれる粒子の総数である。

3. 具体的解析とループテンソル法との比較

表-1に4種類の円パッキングの例を示す。構成は、全て 16×16 (cm²)の正方形領域におけるパッキングであり、

Case 1は直径2cmの粒子のみ、Case 2は直径2cmと3cmの粒子がほぼ同数、Case 3と4は直径2cmと4cmの粒子の組み合わせである。

これらの各パッキングについて、平均ループテンソル・ループ分散テンソル、そして平均接続テンソル・接続分散テンソルを求めた。また、各パッキングにおける個々の粒子のしめる面積を修正ボロノイ分割法(図-3)から求め、平均と分散から変動係数を求めた。

表-1 各パッキングにおけるテンソルの値

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4
パッキング図				
平均ループテンソル $\bar{\pi}$	$\begin{pmatrix} 3.962 & 0 \\ 0 & 3.528 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7.572 & 0 \\ 0 & 5.959 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7.734 & 0 \\ 0 & 5.936 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8.709 & 0 \\ 0 & 6.386 \end{pmatrix}$
ループ分散テンソル η	$\begin{pmatrix} 1.264 & 0 \\ 0 & 1.841 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8.522 & 0 \\ 0 & 4.379 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 14.837 & 0 \\ 0 & 10.717 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 22.023 & 0 \\ 0 & 22.507 \end{pmatrix}$
平均接続テンソル π	$\begin{pmatrix} 3.724 & 0 \\ 0 & 3.477 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.829 & 0 \\ 0 & 4.719 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.955 & 0 \\ 0 & 4.032 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.725 & 0 \\ 0 & 4.423 \end{pmatrix}$
接続分散テンソル η	$\begin{pmatrix} 2.158 & 0 \\ 0 & 1.846 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11.985 & 0 \\ 0 & 5.563 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20.429 & 0 \\ 0 & 14.041 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 24.529 & 0 \\ 0 & 19.051 \end{pmatrix}$

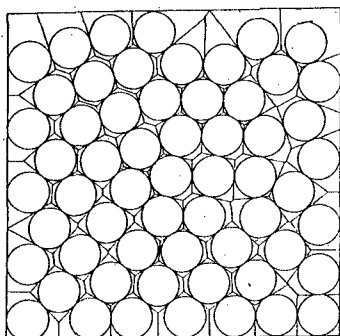


図-3 修正ボロノイ分割法

4. 解析結果の考察

平均ループテンソルとループ分散テンソルについて、 $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ 、 $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ としてパッキングの異方度 $K = \psi_1 / \psi_2$ 、ループの平均周長 $\ell = \text{tr } \Psi$ 、ループテンソルの変動係数 $C = \sqrt{\text{tr } \mu} / \text{tr } \Psi$ 、接続テンソルの変動係数 $C' = \sqrt{\text{tr } \eta} / \text{tr } \mu$ 、そしてボロノイ分割の面積による変動係数 $C'' = \delta / A$ 、 $\{\delta = \sqrt{1/N \sum (A - A_i)^2}$, A は各粒子領域の平均値, A_i は各粒子領域の面積値, N は粒子領域数}、について考察する。図-4と図-5にこれらの変化をグラフ化した。

これらを見ると、ループテンソルによる方法・接続テンソルによる方法・修正ボロノイ分割による方法の3つの解析結果が全て同じ傾向を示している。このことから、一定領域内のパッキングにおいて、Case 1のような等径粒子のパッキングは、間隙の分散が少ない等方的なパッキングで、それに異径粒子が加わってゆくことによって、段々と間隙の分散が大きくなる不均一的なパッキングとなってゆくことが、従来のループテンソル以外の方法である接続テンソルや修正ボロノイ分割法を用いても示せることがわかった。

5. あとがき

2次元粒子集合体の間隙分布の表現方法として、ループだけでなく粒子の接続にも着目して接続テンソルを導入し、さらに、修正ボロノイ分割法も導入して、円粒子パッキングについて解析を行った。

その結果、これらの方法も、パッキングの不均一性の解析に有効であることがわかった。

今後は、これらの方法を、粒状体の力学的性質の解析について応用してゆきたいと考えている。

・参考文献

- 1) T. Mogami: A statistical approach to the mechanics of granular materials, Soils and Foundations, Vol. 5, No. 2, pp. 26-36, 1965
- 2) 安保祥成、佐武正雄：ループテンソルとその分散による間隙分布の表現、粒状体の力学シンポジウム発表論文集、pp. 5-8、1993

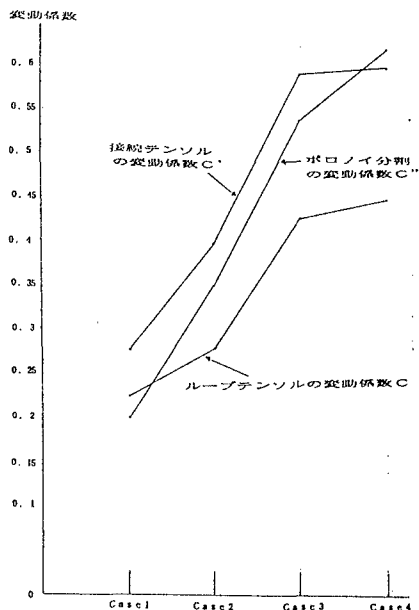


図-4 解析結果

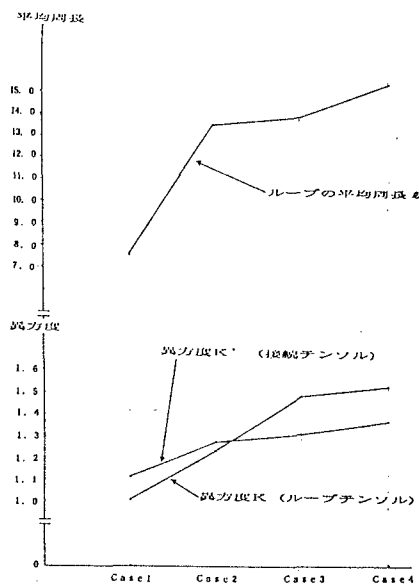


図-5 解析結果