

砂の体積ひずみ特性の漸近近似理論

東北大学 学生員 ○ 兼平 一弘
 東北大学 正会員 柳澤 栄司
 東北大学 正会員 池田 清宏

1.はじめに

分岐理論は理工学の諸分野で幅広く研究されており、近年砂の滑り線形成現象にも適用されている。例えば池田ら^{1) 2)}は材料の標準状態からのなんらかの狂い、すなわち初期不整より、砂の三軸試験体の応力-軸ひずみ関係の軟化を説明している。本研究では、この分岐理論を用いて、砂の三軸試験体のストレス-ダイレイタンス特性を説明するものである。

2.分岐理論

ある非線形の釣り合い式

$$F(\sigma, \mathbf{u}, \varepsilon, \mathbf{d})=0 \quad (1)$$

を考える。式中 $\mathbf{u}=(u_1, u_2, \dots)^T$ は変位ベクトルを、 $\mathbf{d}=(d_1, d_2, \dots)^T$ は初期不整ベクトルをそれぞれ表す。

分岐点の近傍における増分量を

$$d\sigma = \sigma - \sigma_c^0, \quad d\varepsilon_v = \varepsilon_v - (\varepsilon_v)^0 \quad (2)$$

と定義する。ここで下付き添え字(c)は特異(分岐)点に対応し、上付き添え字(0)は、完全系に対応することを表す。釣り合い方程式をある分岐点近傍でLyapunov-Schmidt展開することにより、1次元の増分釣り合い式(分岐方程式)

$$(d\varepsilon_v - r d\sigma - d\varepsilon_v^2) d\sigma + p(d\varepsilon_v - r d\sigma - d\varepsilon_v^2)^3 + q\varepsilon + h.o.t. = 0 \quad (3)$$

が求まる。ここに、p、q、r、sはパラメータである。実験曲線の最大応力 σ_c はKoiterの2/3乗則

$$d\sigma_c = -(27pq^2/4)^{1/3} \varepsilon^{2/3} + O(\varepsilon^{4/3}) \quad (4)$$

に従う。不完全系の曲線と放物線 $d\sigma = -gd\varepsilon_v^2$ との交点における変位の値は

$$d\varepsilon_v / (d\sigma = -gd\varepsilon_v^2) = (q/g-p)^{1/3} \varepsilon^{1/3} + O(\varepsilon^{2/3}) \quad (5)$$

という1/3乗則に乗る。

(4)と(5)を連立して解くことにより、

$$d\sigma = \frac{3}{2^{2/3}} p^{1/3} (g-p)^{2/3} d\varepsilon_v^2 \quad (6)$$

という関係が成り立つ。

初期不整ベクトル $\mathbf{d}$ の各成分が正規分布に従うという仮定のもとに、種々の分岐点における最大応力の変動がIkeda・Murotaにより求められている。砂の強度を支配すると考えられる、 D_n (軸)対称性を持つ系の指数5以上の群論的2重不安定分岐点の場合には、最大応力の確率密度関数が

$$f_{\sigma_c}(\sigma_c) = (3(\sigma_c - \sigma_c^0)/2C^3) \exp(-|\sigma_c - \sigma_c^0|/2C^3) \quad (7)$$

と陽な形で求まる。実験を繰り返すことにより得た供試体の最大応力の標本平均

$E_{\text{sample}}[\sigma_c]$ と標本分散 $\text{Var}_{\text{sample}}[\sigma_c]$ をもとに

$$C = (\text{Var}_{\text{sample}}[\sigma_c])^{1/2} / 0.409$$

$$\sigma_c^0 = E_{\text{sample}}[\sigma_c] + 2.75(\text{Var}_{\text{sample}}[\sigma_c])^{1/2} \quad (8)$$

から σ_c^0 とCの値を計算できる。これらの値を式(6)に代入すると、最大応力の確率密度関数が求まる。

3.実験結果への適用

豊浦標準砂の排水三軸圧縮試験を同一の条件で数多く行い(18ケース、供試体直径7cm、高さ10cm、相対密度50%になるように管理)、図1に示す最大応力のヒストグラムと確率密度関数は比較的よく一致して

いる。図2に示すようにある代表的な試験体の応力-歪曲線を、漸近近似式(3)による曲線が最も良く近似できるように、式中のパラメータ p 、 r 、 s 、 ε_c^0 を求めた。

次に、分岐点から $g=0.5$ なる放物線と各供試体の σ - ε_v 曲線との交点のひずみ値 $\varepsilon_{v|d\sigma=-gd\varepsilon_v}$ と(4)から求めた $\varepsilon^{1/3}$ を取り、図3にプロットした。 $\varepsilon_{v|d\sigma=-gd\varepsilon_v}$ と $\varepsilon^{1/3}$ の間にはきれいな線形関係があった。又、最大応力の増分と分岐点のひずみと放物線の交点のひずみの増分の二乗の間の関係を調べ図4にプロットした。これにも原点を通る明らかな線形関係が成り立ち本理論展開の妥当性を示している。

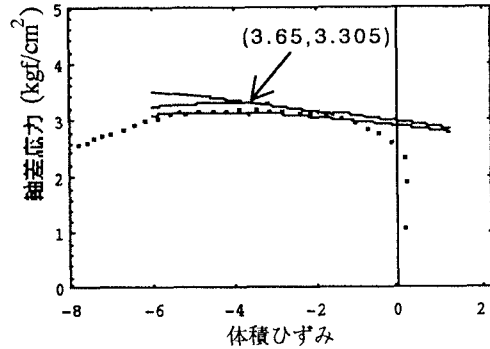


図2 応力-体積ひずみ曲線と近似曲線

4.まとめ

本研究では、砂の体積ひずみ特性の一端を分岐理論により説明できた。多岐多彩な側面を持つ土の分岐現象を体系的に記述することが今後の課題である。

参考文献

- [1]池田清宏・岩熊哲夫・中沢正利・後藤聡・堀宗朗初期不整感度則による分岐特性の漸近近似法、構造工学論文集、Vol.39A,pp407-417,1993.3
- [2]K.Ikeda and S.Goto(1993):"Imperfection ensitivity for size effect of granular materials,"Soil and Foundations,33-2,157-170.

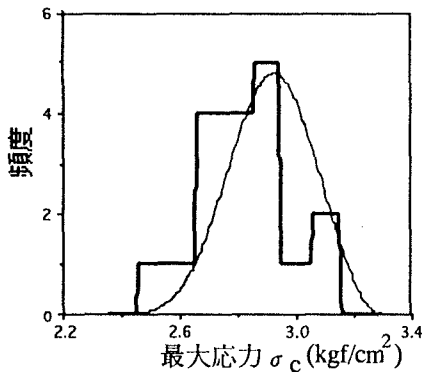


図1 最大応力のヒストグラムと理論曲線

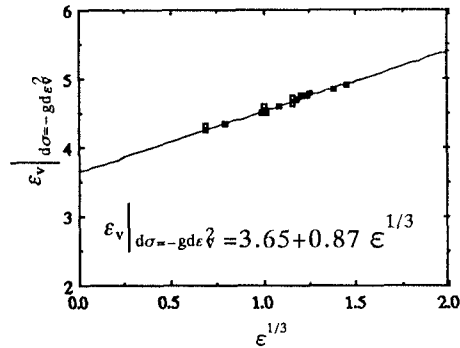


図4 1/3乗則の相関関係図

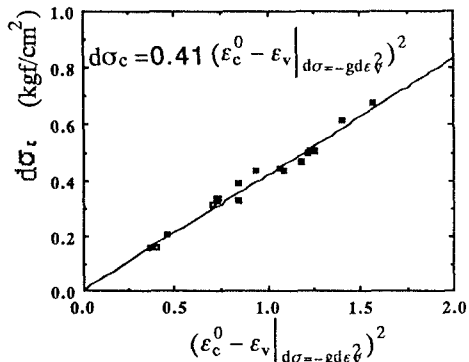


図3 応力増分-ひずみ増分の相関関係図