Ⅲ－29

初期不整を持つ材料の漸近的分岐解析

東北大学　学生員　○加河　茂美
東北大学　正会員　　柳澤　栄司
東北大学　正会員　　池田　清宏

1.はじめに

砂、コンクリート、鋼材など土木材料の強度は試験毎に不可避的に変動することが知られている。池田等[1][2]は、この変動の原因として、材料の標準状態からのなんらかの狂い、すなわち初期不整を取り上げ、分岐理論によりこれら材料の初期不整のパターンを求めている。すでに、この理論をコンクリートの強度変動に適用し理論より誘導された圧縮強度の確率密度関数とヒストグラムの検証はなされており[3]、本研究では初期不整感度則を用いて分岐理論の整合性を確かめ分岐方程式を求めて応力-歪曲線を漸近近似するものである。

2.分岐理論

ある非線形の釣り合い式

$$F(\sigma, u, d\varepsilon) = 0 \qquad (1)$$

とその解として得られる図1に示す応力ー（軸）歪曲線を考える。式中u=(u1,u2,…)Tは変位ベクトルを、d=(d1,d2,…)Tは初期不整ベクトルをそれぞれ表す。

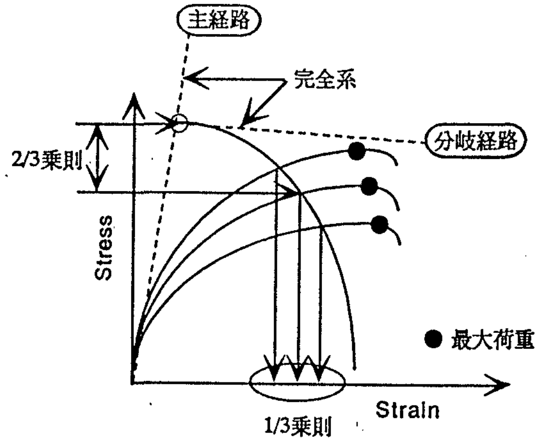

図1　応力-歪（σ-ε）曲線
図中の初期不整を持つ（$\varepsilon \neq 0$）曲線（破線）が実験値に対応し、黒丸（●）が応力の最大点$(\sigma_c, \varepsilon_c)$を表す。初期不整がない（$\varepsilon$=0）曲線が狂いのない理想的な完全系であり、白丸（○）は分岐点$(\sigma_c^0, \varepsilon_c^0)$を示す。下付き添え字（c）は特異（分岐）点に対応することを、上付き添え字（0）は完全系（ε=0）に対応することをそれぞれ示す。

分岐点の近傍における増分量を

$$d\sigma = \sigma - \sigma_c^0 \quad , \quad d\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_c^0 \qquad (2)$$

と定義する。釣り合い方程式をある分岐点近傍でLyapunov-Schmidt展開することにより、1次元の増分釣り合い式（分岐方程式）

$$(d\varepsilon_a - rd\sigma - d\varepsilon_a^2)d\sigma + p(d\varepsilon_a - rd\sigma - d\varepsilon_a^2)^3 + q\varepsilon + \text{h.o.t} = 0 \qquad (3)$$

が求まる。ここに、p、q、r、sはパラメータである。実験曲線の最大応力 σ_c はKoitterの2/3乗則

$$d\sigma_c = -(27pq^2/4)^{1/3}\varepsilon^{1/3} + o(\varepsilon^{4/3}) \qquad (4)$$

に従う3）。不完全系の曲線と放物線 $d\sigma = -gd\varepsilon_a^2$ との交点における変位の値は

$$d\sigma\big|_{d\sigma=-d\varepsilon_a^2} = (q/g - p)^{1/3}\varepsilon^{1/3} + o(\varepsilon^{2/3}) \qquad (5)$$

という1/3乗則）に乗る。

初期不整ベクトルdの各成分が正規分布に従うという仮定のもとに、種々の分岐点における最大応力の変動がIkeda・Murotaにより求められている。材料の強度を支配すると考えられる、Dn（軸）対称性を持つ系の指数5以上の群論的2重不安定分岐点の場合には、最大応力の確率密度関数が

$$f_{\sigma_c}(\sigma_c) = 3(\sigma_c - \sigma_c^0)/2C^3 \exp\left(-\left|\sigma_c - \sigma_c^0\right|^3/2C^3\right) \qquad (6)$$

のような形で求まる。

実験を繰り返し行うことにより得た供試体の最大応力の標本平均

$E_{sample}[\sigma_c]$と標本分散$Var_{sample}[\sigma_c]$をもとに

$$C = (Var_{sample}[\sigma_c])^{1/2} / 0.409$$

$$\sigma_c^0 = E_{sample[\sigma_c]} + 2.75(Var_{sample}[\sigma_c])^{1/2} \quad (7)$$

からσ_c^0とCの値を計算できる。これらの値を式(6)に代入すると、最大応力の確率密度関数が求まる。

4.実験結果への適用

コンクリートの一軸圧縮試験を同一の条件で13本分行い、図2に示す最大応力σ_cのヒストグラムと2重不安定分岐点の確率密度関数を比較した。

図3に示すある代表的な試験体の応力-歪曲線（図中、最も上の実線）を、漸近近似式(3)による曲線（破線）が最も良く近似できるように、式中のパラメータp、q、r、s、ε_c^0を求めた。次に、他の供試体の最大応力の値と漸近式(4)から各供試体の初期不整の値を求め、その漸近近似曲線（破線）を図中に示した。漸近曲線は精度良く供試体の応力-歪曲線を近似している。

次に、図3中に示す放物線と各供試体のσ-ε_a曲線との交点の応力値$d\sigma = -gd\varepsilon_a^2$と$\varepsilon^{1/3}$を取り、図4にプロットした。$d\sigma = -gd\varepsilon_a^2$と$\varepsilon^{1/3}$の間にはきれいな線形関係があり、漸近式(5)ならびに本理論展開の妥当性を示している。

5.まとめ

本研究では、砂以外にコンクリートなどの材料一般の強度変動の一端を分岐理論により説明できた。多伎多彩な側面を持つ材料の分岐現象を体系的に記述することが今後の課題である。

参考文献

(1) 池田清宏・岩熊哲夫・中沢正利・後藤聡・堀宗朗：初期不整感度則による分岐特性の漸近近似法、構造工学論文,Vol.39A 1993.3,pp.407～418

(2) K.Ikeda and S.Goto(1993) : Imperfection ensitivity for size effect of grannular materials," Soils and Foundations,33-2,157-170.

(3) 城岸整功：分岐理論を適用したコンクリート強度の統計的考察、長岡技術科学大学卒業論文、1994

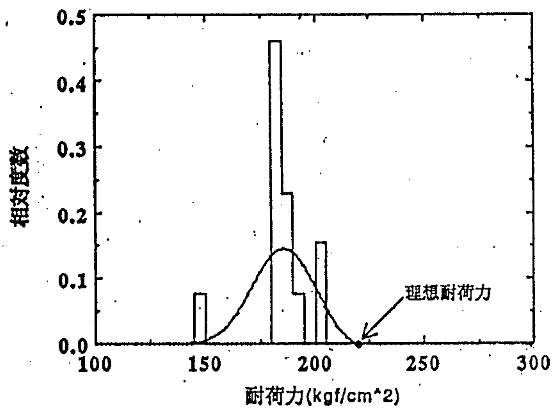

図2　耐荷力の確率密度関数（Case1）

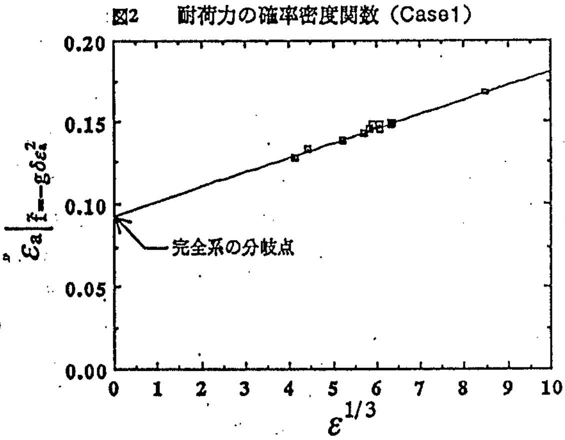

図3　$\varepsilon^{1/3}$ － $\varepsilon_a|_{\tilde{\tau}=-g\delta\varepsilon_a^2}$ 関係（Case1）

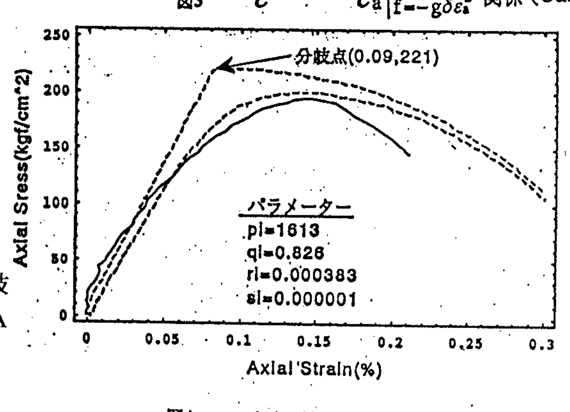

図4　応力-軸歪曲線（Case1）