

地盤材料の構成モデルに関する熱力学的考察の有用性

八戸工業大学（正） 飛田善雄

1. はじめに

地盤材料の様に複雑な挙動を示す材料の構成モデルの定式化を考える上で、さらにその数式モデルを境界値／初期値問題に適用した際の、解の分岐や安定問題を考察するうえで、熱力学的考察は有用な結果をもたらすことが期待できる。熱力学を導入することにより、より大きな枠組みでの考察が可能となり、他分野の知識を導入することも可能となる。熱の発生が材料の力学的性質に影響を及ぼす場合のように、カップリング挙動を示す場合には、もちろん熱力学的考察は不可欠なものとなる。しかし、純粋に力学的な挙動（ここでは、特に弾塑性挙動に注目する）を対象にしたときには、次のような疑問が提示できる「果たして、熱力学的考察は、通常の構成モデルの定式化に勝っていると言えるのであろうか？また、構成モデルを境界値・初期値問題に適用したときに、熱力学的考察は、対象とする支配方程式の安定性や分岐した後の挙動に統一的かつ有用な解釈を与えることができるのか？」

本研究は、このような疑問から出発している。本文では、まず非平衡熱力学の現状を示し、次に連続体力学においては、極めて限られた形の、完全とは言えない熱力学が導入されているに過ぎないことを示す。最後に熱力学の導入が有用な事例を示す。本文では数式的な議論は省き、記述的表現に留める。

2. 構成モデルおよび系の安定性にける熱力学的研究：レビュー

平衡熱力学および平衡よりわずかに離れた状態で、熱力学的力 Y_α と熱力学的流束 $\dot{X}_\alpha$ の間に、 $Y_\alpha = L_{\alpha\beta} \dot{X}_\beta$; $L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha}$ が成立する、いわゆる Onsager の相反関係が成立する線形非平衡熱力学については、ほぼ完成の域に達している。連続体力学との係わりを強く意識した熱力学の発展に関する文献としては、Niiseki (1991), Lavenda (1993) が挙げられる。

Lavendaによれば、線形熱力学を基礎として、二つの異なる学派による発展が見られた。その一つは有理熱力学学派であり、熱力学の第2法則の一つの表現である Clausius-Duhem の不等式を第一義的な式として、これに基づいて、構成式の合理的な定式化を論じた。一方、Prigogineらの学派は一般化熱力学と呼ばれ、エントロピー生成最小の原理を指導原理として、特に対象とする系の安定性を論じた。連続体力学関係の文献では、前者：有理熱力学に基づく構成式の制約条件が詳述されており、対象とする問題の支配方程式系の安定問題等への適用は少ない（例外として、Bazant and Ceodlin, 1991, 井上&堀井, 1994など）。

これらの発展の中で、特に大事なことは、Onsagerの線形非平衡熱力学の範囲では、現象関係式の係数間に対称性（ $L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha}$ ）が成立することより、何らかの適当なスカラーポテンシャル（ J と表現する）が存在し、安定性の条件が第2変分 $\delta^2 J > 0$ として簡潔に表現できることである。しかし、平衡状態から大きく離れた非線形領域では、 $L_{\alpha\beta}$ の対称性は保証されず、よって安定性を議論しようような熱力学的ポテンシャルは存在しないことになる（ $L_{\alpha\beta}$ の対称性が積分可能条件となっている）。非線形非平衡熱力学は、現在でも、卓越した理論は存在せず、混乱した状況となっている（Niiseki, Lavenda）。

3. 構成式における熱力学の応用

構成式に対する熱力学的制約条件とその適用例は、例えば、北川(1987), Maugin(1992), Lubliner(1990)などに詳しい。弾塑性論を基本的枠組みとして、構成モデルを考える場合には、微視的な非可逆過程の平均的表現である内部変数を導入する内部変数理論が用いられることが多い。このため、以下では内部変数理論に限定して話を進める。しかし、内部変数理論の前提となる局所的平衡の正確な定義づけや平衡条件においてのみ明確に定義できるエントロピーや自由エネルギーを非平衡状態に利用することの是非など、問題点が多い。内部変数理論あるいは連続体力学への熱力学の応用は、このようなことを十分に議論することなく、これらのことは先見的（a priori）に成立するものとして、その結果が有用であるか否かを議論するという立場を取っている(Lavenda)。Mauginは、現象論的關係式（彼らフランス学派の目的は、弾塑性論に限らず、破壊力学も含めて同じ数学的枠組みの中で、統一的な表現を行なうことにある）が、内部変数の発展（移行）方程式に垂直性（降伏曲面に相当する凸関数の法線方向に、内部変数は変化する）を仮定する

ことにより、対称性をもつ場合には、境界値問題は、ある汎関数の変分問題と等価となり、その定式化は多くの問題に共通に適用できることを示している。このような構成関係をもつ材料をスタンダード材料と呼んでいる、弾塑性論の用語では、関連流動則に基づくモデルがスタンダード材料である。

熱力学の発展と照らし合わせてみると、Mauginらのスタンダード材料に関する統一的手法は、Onsagerの線形（古典的）非平衡熱力学の取り扱いと酷似している；つまり、あらかじめ、現象を表現する係数が対称性を示す場合に限定されているということである。このことより、弾性問題のエネルギー法や解析力学の様に、境界条件がある条件を満たせば（詳しくは、例えば、北川）、スカラー汎関数の存在は保証され、その後の停留条件としての平衡条件式、安定性の条件などは極めて類似した方法で議論が可能となる。

しかし、多くの地盤材料の構成関係では、非関連流動則などのように対称性を示さない場合が多く、このような場合には、熱力学的考察を行なうことも容易ではない。それは、ちょうど非線形非平衡熱力学が混沌とした状況に類似している。

4. 内部変数を利用した熱力学的定式化の例：地盤材料

最も典型的な熱力学を用いた弾塑性構成式の定式化は、弾性成分を自由エネルギーにより定式化し、塑性成分を散逸関数に組み込んで定式化するものである（例えば、Maugin, Ziegler and Wheli(1984), 岸野(1988)）。特に、エネルギーの消散メカニズムを表現する散逸関数 ϕ （上記表現を用いれば、 $\phi = \text{tr}(\dot{\mathbf{Y}}\dot{\mathbf{X}})$ と定義される）をどのように定式化するか、重要な課題となる。言い換えると、異なる材料の異なる消散メカニズムは散逸関数のかたちに反映されることになる（岸野）。この散逸関数は、散逸に関する構成関係が、対称性の条件を満足しなければ、積分可能条件を満足しないことになり、よって、経路依存性をもつことになり、真の意味でのポテンシャル関数とはなりえないことになる。

熱力学を構成モデルの定式化に利用することの利点の一つは、概念的であるが、散逸関数に見いだすことができる。すなわち、散逸関数の構造（かたち）に絞りで、塑性的挙動を議論することができることである。一つの具体的な有用な事例を考える。熱力学的観点から出発すると、ある内部変数の変化速度を表現する流束 $\dot{\mathbf{X}}$ に対応する熱力学的力 $\mathbf{Y}$ が明確に定義できるということである。繰り返し変形を表現するために、応力原点をはずしてしまうような移動硬化モデルを用いるとき、塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^p$ に共役な応力として作用応力 σ を取ると、散逸 $\phi > 0$ というClausius-Duhemの不等式より導かれる熱力学的条件：散逸正の条件に反することになってしまう（飛田(1988)、この議論は誤りであった）。しかし、ていねいに式を展開すると、共役な応力は $\sigma - \alpha$ ； α は背応力、であることが解かり、移動硬化モデルも、降伏曲面が凸である限り、散逸正の条件を満たすことが解かる。

5. おわりに

以上の議論のみでは、純粋な力学的過程に、熱力学的考察を持ち込むことの有用性を、具体的に示したとは言えないであろう。また、現象係数が非対称な場合の安定性の議論に、熱力学的考察が有効であるか否かについても、何らの見通しもたっていないのが現状である。後者の問題はかなり難しい問題であり、Lavendaは、Liapunovの安定性の理論に基づく手法を示唆している。今後、以上の議論を基礎として、具体的な問題について研究を進めていきたい。

参考文献

Niiseki(1991):東北大学学位論文; Lavenda(1993):Thermodynamics of Irreversible Processes, Dover; Bazant and Cedolin(1991): Stability of Structures, Oxford; 井上, 堀井(1994):地盤の破壊とひずみの局所化に関するシンポジウム, pp.101-104; 北川(1987):弾・塑性力学, 裳華房; Maugin(1992):The Thermomechanics of Plasticity and Fracture, Cambridge; Lubliner(1990):Plasticity Theory, Macmillan; Ziegler and Wherli(1987): Advances in Applied Mechanics, Vol. 25, pp.183-238; 岸野(1988):土木学会論文集, No. 394, pp.115-122; 飛田(1989):第34回土質工学シンポジウム, pp.203-210;