I －19

不等曲げとせん断を受ける弾性矩形板の二次座屈不安定現象に関する研究

東北大学工学部　○学生員　横山　薫
東北大学工学部　正　員　中沢　正利
東北大学工学部　正　員　岩熊　哲夫

1.　まえがき

これまでの平板の後座屈挙動に関する研究[1]によって，面内一軸圧縮あるいは面内等曲げ荷重を受ける平板では初期座屈後に再び不安定現象が生じることが確認されている．また，これらの場合には境界条件および荷重条件ともに軸対称性を有していることを利用した群論的分岐解析が適用可能であり，その利点も大きい．しかし，軸対称性のない荷重条件では，群論的アプローチの長所がいかしにくいために数値的な分岐解析に頼らざるを得ず，特に二次座屈点の数値的分類法を確立する必要がある．そこで本解析では対称性の崩れた不等曲げとせん断の荷重条件下における平板の後座屈挙動を求め，どのような不安定現象が生じるかを検証するとともに，二次座屈点の分類を数値的に行う．ここでは四辺単純支持された弾性矩形板の不安定現象の解析結果を示す．

2.　つり合い経路の追跡と座屈点の分類法

座屈点の分類には荷重 - 変位曲線（つり合い経路）の詳細な把握が必要である．本解析では基礎式として von Kármán- Marguerre の非線形偏微分方程式を採用し，四辺単純支持条件を満足するよう面外たわみ $w(x,y)$ を

$$w(x,y)=t\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad \cdots\cdots (1)$$

と仮定する．ここで，t は板厚を表し，a，b は x，y 方向の板の辺長を表す．m，n は x，y 方向への正弦波の半波数を表し，b_{mn} はこれら二重正弦級数の各々のモードに対応した付加たわみ量の重み係数で未知量である．これらの式と荷重条件を考慮した応力関数 F を用いてガラーキン法を適用すると基礎微分方程式は次の様な三次代数方程式として表される．

$$f_{rs}(b_{mn},\lambda)=f_{rs}(b_{11},b_{12},\cdots,b_{mn},\lambda)=0,\quad r=1,\cdots,m,\quad s=1,\cdots,n \quad \cdots\cdots (2)$$

ここで，λ は作用モーメントを表す荷重パラメータである．式 (2) の解として得られた b_{mn} の値を式 (1) に代入することにより，後座屈領域での面外たわみ $w(x,y)$ が求められる．本解析では式 (2) を摂動法の一次，すなわち Newton-Raphson 法によって解く．荷重制御型解析および変位制御型解析においてそれぞれの未知数 $\{\Delta b_{mn}\}$，$\{\Delta^{\lambda}b_{mn}\}$ は

$$\{\Delta b_{mn}\}=\{\Delta b_{11},\Delta b_{12},\cdots,\Delta b_{mn}\}^T=[K_b]^{-1}\{f_{rs,\lambda}\}\Delta\lambda \quad \cdots\cdots (3\text{-a})$$

$$\{\Delta^{\lambda}b_{mn}\}=\{\Delta b_{11},\cdots,\Delta\lambda,\cdots,\Delta b_{mn}\}^T=[K_\lambda]^{-1}\{f_{rs,b_{kl}}\}\Delta b_{kl} \quad \cdots\cdots (3\text{-b})$$

と表すことができる．荷重制御型解析では，荷重パラメータ $\Delta\lambda$ を与えて Δb_{mn} を解き，変位制御型解析では，ある変位成分 Δb_{kl} を指定して，残りの変位成分 Δb_{mn} と荷重パラメータ $\Delta\lambda$ を求める．

本解析では座屈点をつり合い経路上の特異点として扱い，両数値解析手法の接線係数行列 $[K_b]$，$[K_\lambda]$ の行列式を判定することにより半谷らの提案する分類法[2]（表 - 1）を用いて座屈点の数値的分類を行う．

表 −1　座屈点の分類

	$\mid K_b\mid$	$\mid K_\lambda\mid$
つり合い点	$\neq 0$	$\neq 0$
飛び移り座屈点	$=0$	$\neq 0$
分岐点	$=0$	$=0$

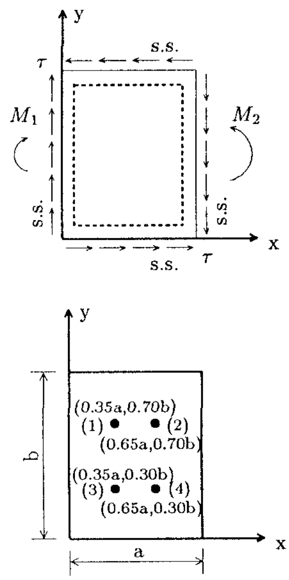

図-1 平板の境界条件とたわみ評価点

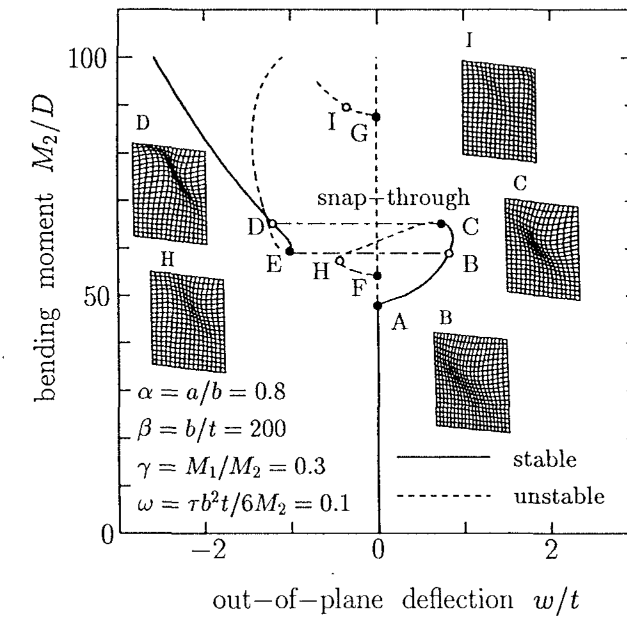

図-2 四辺単純支持の板のつり合い経路 (たわみ評価点 (1))

3. 解析結果

四辺単純支持された図-1の矩形板の解析結果を示す．本解析において b_{mn} は x 方向，y 方向ともに 6 次モードまでを考慮した．図-2において，縦軸に作用モーメントのうちの一つ M_2 を板の曲げ剛性 D で無次元化した M_2/D を，横軸には面外たわみ w を板厚 t で無次元化した w/t をとっている．γ は板の両端に作用する不等曲げモーメントの比 M_1/M_2 を，ω は曲げモーメントに対する純せん断応力 τ の大きさを表す無次元化パラメータである．面外たわみの評価点は (1) 点 $(0.35a, 0.70b)$ である．実線は接線係数行列 $[K_b]$ の固有値全てが正の値である条件を満たす安定な経路を，破線は不安定な経路を表している．なお，図に示されているつり合い経路は板の表裏に対応して正負の対称性を持っていることに注意されたい．

図に示すとおり初期分岐座屈点である A 点以降の後座屈領域のつり合い経路の全容を荷重制御および変位制御型解析を駆使することによって明らかにすることができた．つり合い経路の中で，荷重に対する極限点 C 点，E 点の存在を確認し，両数値解析における接線係数行列の行列式を調べた結果，飛び移り座屈点であることが判明した．この解析例ではつり合い経路上の二次分岐座屈点は確認されなかったが，自明な解である $w/t = 0$ 軸上からの A 点より大きい荷重レベルの初期分岐座屈点 F 点，G 点を確認した．また，全てのつり合い経路において独立した変位成分は存在せず全ての変形モードが混在していることが分かった．

4. まとめ

荷重制御型解析および変位制御型解析を併用することにより，対称性の崩れた複雑な荷重条件下での平板の後座屈領域におけるつり合い経路の全容を明らかにした．また二次座屈点を確認し，それを数値的に分類することができた．

参考文献

1) 中沢正利・池田清宏・和知　聡: 等曲げを受ける弾性矩形板に生じる二次座屈現象の解明, 土木学会論文集, No.507/I-30, pp.65-75, 1995.1.
2) 半谷裕彦・川口健一: 形態解析, 一般逆行列とその応用, 培風館, pp.141-149, 1991.